Teknillinen korkeakoulu Peltonen, Tuomela / Korvola

Mat-1.403, Matematiikan peruskurssi L 3

2. välikoe, 17. 11. 1997

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille

1. opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys
2. opiskelijanumero + kirjain, **tekstaten** sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet
3. koulutusohjelma (AS, KEM, KON, MAA, MAK, PUU, RYK, TFY, TIK, TUO, SÄH)
4. mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
5. nimikirjoitus.

1. Laske

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}, n \in \mathbb{N}$$

   residylausetta käyttäen integroimalla pitkin $\frac{\pi}{n}$-kulmaisen ympyräsektorin reunaa. Muista perustella kaikkien laskuissa esiintyvien integraalien arvot!

2. Olkoon $V = \{x = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid a_k \in \mathbb{R}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}\}$. Tällöin V on reaalinen vektoriavaruus. Mitkä seuraavista V:n osajoukoista ovat sen vektorialiavaruuksia:

   (a) $U_1 = \{x = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in V \mid$ sarja $\sum_k |a_k|$ suppenee$\}$

   (b) $U_2 = \{x = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in V \mid a_k = a_1$ kun $k > 1$ ja k on alkuluku$\}$

   (c) $U_3 = \{x = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in V \mid a_k = 0$ kun $\cos k > 0\}$?

   Perustele!

3. Olkoon $P_n, n \in \mathbb{N}$ enintään astetta $n-1$ olevien polynomien joukko ja $A : P_n \to \mathbb{R}^2$ siten,että

$$A(f) = (\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t, f'(0)) \text{ kun } f \in P_n.$$

   Osoita, että A on lineaarinen kuvaus ja laske sen ytimen sekä kuva-avaruuden dimensio.

4. Olkoon V sisätuloavaruus. Osoita, että tällöin pätee:

   (a) jos V reaalilukukertoiminen niin

$$(u,v) = \frac{1}{4}(||u+v||^2 - ||u-v||^2) \text{ kaikilla } u, v \in V,$$

   (b) jos V kompleksilukukertoiminen niin

$$(u,v) = \frac{1}{4}(||u+v||^2 - ||u-v||^2) + \frac{1}{4}i(||u+iv||^2 - ||u-iv||^2) \text{ kaikilla } u, v \in V.$$