

Mat-1.403 Matematiikan peruskurssi L3

2. Välikoe 10.11.2003

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää funktiolaskinta eikä muita apuvälineitä. Koeaika on kolme tuntia.

1. Olkoon $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ sellainen kompleksikertoiminen neliömatriisi, että

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \text{kaikilla} \quad i = 1, \dots, n.$$

Näytä, että matriisi \mathbf{A} on kääntyvä.

2. Määritä matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Jordanin kanoninen muoto \mathbf{J} ja kannanvaihtomatriisi \mathbf{V} siten, että $\mathbf{J} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$. Mitkä ovat matriisin \mathbf{A} ominaisarvojen algebralliset ja geometriset kertaluvut?

3. Olkoon

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Diagonalisoi matriisi \mathbf{B} .
(b) Laske $e^{\mathbf{B}}$ matriisin \mathbf{B} diagonalisoinnin avulla.
(c) Laske $e^{\mathbf{B}}$ suoraan matriisiekspONENTIN määritelmästä.
4. Muotoile kompleksikertoimisen neliömatriisin Schurin hajotelma ja spektraalikuvauslause. Todista edellisen avulla jälkimmäinen.

Perustele selkeästi kaikki vastauksesi!