

## Mat-1.403 Matematiikan peruskurssi L3

### 2. Välikoe 11.11.2002

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ★-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. Olkoon  $V_{\alpha,\beta}$  vektoreiden

$$\mathbf{v}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{v}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta \end{bmatrix}$$

virittämä aliavaruus, kun  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Millä  $\alpha$ :n ja  $\beta$ :n arvoilla  $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2\}$  on  $V_{\alpha,\beta}$ :n kanta?

2. Olkoon  $\mathbb{T}_n$  korkeintaan  $n$ -asteisten trigonometristen polynomien, eli muotoa

$$t(x) = a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))$$

olevien funktioiden muodostama lineaariavaruus. Tiedetään, että joukko

$$B = \{1, \cos(x), \dots, \cos(nx), \sin(x), \dots, \sin(nx)\}$$

on lineaarisesti riippumaton (eli tätä ei tarvitse todistaa). Olkoon  $D : \mathbb{T}_n \rightarrow \mathbb{T}_n$  derivaattakuvaus  $D(t)(x) = t'(x)$ .

- (a) Etsi  $D$ :n ydin  $N(D)$  ja kuva-avaruus  $R(D)$ .  
(b) Etsi  $D$ :n matriisi kannan  $B$  suhteen.

3. Laske matriisin  $\mathbf{A}$  QR-hajotelma ja ratkaise tehtävä  $\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2$ , kun

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Kirjoita differenssiyhtälö  $y_{k+1} = 2y_k - y_{k-1} + 1$  muotoon  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{Ax}^k + \mathbf{b}$  ja ratkaise se alkuarvoilla  $y_0 = 0, y_1 = 1$ .