Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu
Nevanlinna, Eirola / Perämäki

Mat-1.403 Matematiikan peruskurssi L3

2. välikoe 13.11.2001

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi -kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ⋆-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Tavallisen funktiolaskimen käyttö on sallittu.

1. Olkoon $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ ja $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Määritellään kuvaus $T : V \to V$ kaavalla $T(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{JXJ}$. Näytä, että T on lineaarikuvaus. Etsi kannat T:n ytimelle $N(T)$ ja kuva-avaruudelle $R(T)$.

2. Olkoot $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3$ matriisin $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & i \\ -2 & -i & -1 \end{bmatrix}$ ominaisarvot. Etsi välit $[\alpha_1, \beta_1]$ ja $[\alpha_3, \beta_3]$ siten, että $-\infty < \beta_1 < \alpha_3 < \infty$ ja varmuudella pätee $\lambda_1 \in [\alpha_1, \beta_1]$ ja $\lambda_3 \in [\alpha_3, \beta_3]$. Perustele valintasi.

3. Laske matriisin $\boldsymbol{A}^k$ alkiot, kun $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$.

4. Olkoon $V = C[0,1]$ varustettuna sisätulolla $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$ ja normilla $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Mikä on annetun f:n paras approksimaatio korkeintaan 1. asteen polynomilla tämän normin mielessä? Sovella tulostasi tapaukseen $f(t) = e^t$ sekä piirrä f ja vastaava polynomi.