Teknillinen korkeakoulu Peltonen, Nevanlinna / Kemppainen
Mat-1.403, Matematiikan peruskurssi L 3
2. välikoe, 13. 11. 2000

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille
1. opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys
2. opiskelijanumero + kirjain, **tekstaten** sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet
3. koulutusohjelma (AS, KEM, KON, MAA, MAK, PUU, RYK, TFY, TIK, TUO, SÄH)
4. mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
5. nimikirjoitus.

1. Ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia? Jos väite on tosi, riittää pelkkä vastaus. Jos väite ei ole tosi, vaaditaan lyhyt perustelu.

   Olkoon V ja Z äärellisulotteisia kompleksilukukertoimisia vektoriavaruuksia ja $A,\ B : V \to Z$ lineaarisia kuvauksia.

   (a) Jos kuvauksilla A ja B on samat ominaisarvot, niin niiden esitysmatriisit ovat yhdenmuotoisia.

   (b) Olkoon $S \subset V$ joukko, jossa on $n \in \mathbb{N}$ vektoria. Tällöin S on V:n jonkin n-ulotteisen vektorialiavaruuden kanta jos ja vain jos S on lineaarisesti riippumaton.

   (c) Olkoon $S_1,\ S_2 \subset V$ epätyhjiä joukkoja. Tällöin pätee

   $$\mathrm{sp}(S_1 \cap S_2) = (\mathrm{sp}\, S_1) \cap (\mathrm{sp}\, S_2).$$

   (d) $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}\, A) + \dim Z$ jos ja vain jos A on surjektio.

   (e) Jos A:lle ja B:lle löytyy sama esitysmatriisi, niin $A = B$.

   (f) A:lla on diagonalisoituva esitysmatriisi jos ja vain jos sen jokaiselle ominaisarvolle λ ja vastaavalle ominaisavaruudelle V_λ pätee: λ on karakteristisen polynomin $(\dim V_\lambda)$-kertainen nollakohta.

2. Olkoon

   $$V = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ kuvaus, jolle } f(n) \neq 0 \text{ pätee enintään äärellisen monella } n\}.$$

   Osoita, että V on vektoriavaruus. Muodosta V:lle kanta ja todista se kannaksi.

3. Selvitä mikä on

   (a) QR-hajotelma ja miten se muodostetaan?

   (b) QR-iteraatio (perusversio)?

4. Olkoon $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sisätuloavaruuden V ortonormaali kanta ja $A : V \to V$ lineaarikuvaus siten, että $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ on ortonormaali joukko. Osoita, että kaikilla $x,\ y \in V$ pätee

   $$< Ax, Ay > = < x, y > .$$