Teknillinen korkeakoulu — Peltonen, Tuomela / Bingham

Mat-1.403, Matematiikan peruskurssi L 3

1. välikoe, 12. 10. 1998

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille
1. opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys
2. opiskelijanumero + kirjain, **tekstaten** sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet
3. koulutusohjelma (AS, KEM, KON, MAA, MAK, PUU, RYK, TFY, TIK, TUO, SÄH)
4. mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
5. nimikirjoitus.

1. Muodosta sellaiset logaritmin analyyttiset haarat f ja g, että f on määritelty pitkin ensimmäisen neljänneksen ($\{(x,y)|\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$) ja g pitkin toisen neljänneksen ($\{(x,y)|\ x \leq 0,\ y \geq 0\}$) puolittajaa aukileikatussa tasossa ja että $f = g$ näiden puolittajien välissä. Mikä on $f - g$ muualla?

2. Olkoon $f = u + \mathrm{i}v$ analyyttinen koko tasossa ja $u - v$ vakiofunktio. Osoita, että f on vakio.

3. Mikä on potenssisarjan
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z + 2 - 5\mathrm{i})^{2n}$$
suppenemissäde, kun tiedetään, että reaalinen potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n$ suppenee täsmälleen kun $-2 \leq x < 2$? Perustele vastauksesi.

4. Laske residylauseen avulla integraali
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^3}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. Define analytic branches f and g of the logarithm function so that f is defined in the plane cut along the ray bisecting the first quarter ($\{(x,y)|\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$) and g is defined in the plane cut along the ray bisecting the second quarter ($\{(x,y)|\ x \leq 0,\ y \geq 0\}$), and $f = g$ between these two rays. What is $f - g$ elsewhere?

2. Let $f = u + \mathrm{i}v$ be analytic in the whole plane and let $u - v$ be constant. Show that f is constant.

3. Find the radius of convergence of the power series
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z + 2 - 5\mathrm{i})^{2n},$$
while it is known that the real power series $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n$ converges exactly when $-2 \leq x < 2$. Justify your answer.

4. Use the residue theorem to evaluate the integral
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^3}, \quad a \in \mathbb{R}.$$