

Mat-1.403 Matematiikan peruskurssi L3

1. Välikoe 13.10.2003

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää funktiolaskinta eikä muita apuvälineitä. Koeaika on kolme tuntia.

1. Osoita suoraan määritelmän mukaan (eli $\delta - \epsilon$ -tekniikalla), että

(a) funktio

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

on jatkuva origossa.

(b) funktio

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad f(z) = \begin{cases} z \sin\left(\frac{1}{z}\right) & , z \neq 0, \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$$

ei ole jatkuva origossa.

2. Laske integraali

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} \frac{\cos z \, dz}{(z-1)(z+1)}$$

käyttäen osamurtokehitelmää ja Cauchyn integraalikaavaa.

3. Laske sarjojen

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} z^n \quad , \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n z^{2n}}{2^n (n+2)(n+1)}$$

suppenemisympyrät. (Muistutus: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, kun $n \geq k \geq 0$.)

4. Laske residyjen avulla integraali

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 1}.$$

Perustele selkeästi kaikki vastauksesi!