

Mat-1.403 Matematiikan peruskurssi L3

1. Välikoe 14.10.2002

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ★-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. Olkoon γ positiivisesti parametrisoitu Jordanin käyrä, joka yhdistää pisteet

$$1 + i\pi/2, \quad -1 + i\pi/2, \quad -1 - i\pi/2 \quad \text{ja} \quad 1 - i\pi/2$$

toisiinsa janoilla.

- (a) Piirrä kuva polusta $\Gamma = \exp(\gamma)$, joka syntyy, kun γ :n pisteet kuvataan eksponenttifunktiolla.
(b) Tiedetään, että f on rationaalifunktio, jonka navoille b_j pätee $\operatorname{Re} b_j < 0$. Laske

$$\int_{\Gamma} f.$$

Perustele vastauksesi.

2. Olkoon f kokonainen jaksollinen funktio, jonka jakso on 1 (eli jolle pätee $f(z+1) = f(z)$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$). Oletetaan lisäksi, että $f(0) = 1$. Laske

$$\int_{|\zeta|=\pi} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-1)(\zeta-m)} d\zeta$$

arvoilla $m = 2$ ja $m = 4$.

3. (a) Olkoon f analyyttinen joukossa $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. Määrittele, milloin z_0 on f :n
(i) poistuva singulaaripiste, (ii) napa, (iii) oleellinen singulaaripiste.
(b) Tarkastellaan joukossa $B(0, 1) \setminus \{0\}$ määriteltyjä analyyttisiä funktioita

$$f_1(z) = z \sin(1/z), \quad f_2(z) = \frac{1}{\sin z} \quad \text{ja} \quad f_3(z) = \frac{z}{\sin z}.$$

Määrää origossa sijaitsevan erikoispisteen luonne kullekin funktiolle.

4. Olkoon $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ jatkuva funktio, jolle pätee $|g(t)| \leq K$. Asetetaan

$$G(s) = \int_0^1 e^{-st} g(t) dt.$$

- (a) Perustele, miksi $G(s)$ on analyyttinen koko kompleksitasossa.
(b) Anna (indeksistä k ja funktion g ylärajasta K riippuva) yläraja kertoimien a_k itseisarvoille sarjakehitelmässä

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k.$$

- (c) Perustele, miksi $G(s)$ ei voi olla polynomi, ellei g ole identtisesti nolla.