

Mat-1.403 Matematiikan peruskurssi L3

1. välikoe 16.10.2001

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi -kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ★-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Tavallisen funktiolaskimen käyttö on sallittu.

1. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{xy}{z}, \quad (z = x + iy).$$

Voidaanko f jatkaa origoon siten, että jatkettu f

1. olisi origossa jatkuva?
 2. toteuttaisi origossa Cauchy-Riemannin yhtälöt?
 3. olisi jossakin origon ympäristössä analyyttinen?
2. Olkoon $f = u + iv$ analyyttinen koko tasossa ja $u - v$ vakiofunktio. Osoita, että f on vakio.
 3. Laske residylauseen avulla integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}, \quad a, b > 0.$$

4. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla alkuarvotehtävä

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^t, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Laplace-muunnos kaavoja:

$$\mathcal{L}(tf(t))(s) = -\mathcal{L}(f(t))'(s).$$

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s - a).$$

$$\mathcal{L}(u(t - a)f(t - a))(s) = e^{-as}\mathcal{L}(f(t))(s).$$

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0).$$

$$\mathcal{L}(t^k)(s) = \frac{k!}{s^{k+1}}.$$

$$\mathcal{L}(\sin(at))(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

$$\mathcal{L}(\cos(at))(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$