Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Weikkolainen, Eirola/ Lukkari

Mat-1.1030 Matematiikan peruskurssi L3

1. välikoe 17.10.2006

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Laskimet ovat kiellettyjä.

1. Näytä, että
$$\left(\frac{a\mathrm{i}+1}{a\mathrm{i}-1}\right)^n e^{2n\,\mathrm{i}\,\overline{\mathrm{arc}}\cot a} = 1$$
kaikilla $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Määrittelemme eksponenttifunktion asettamalla
$$e^z = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y),$$
missä $z = x + \mathrm{i}y$. Osoita, että e^z on kompleksimuuttujan funktiona differentioituva ja että
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}e^z = e^z.$$

3. Luennoilla todistettiin seuraava tulos: Olkoon G alue, joka sisältää koko ylemmän puolitason $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Oletetaan, että funktio $f : G \to \mathbb{C}$ on analyyttinen lukuunottamatta äärellistä määrää singulariteetteja, joista reaaliakselilla sijaitsevat saavat olla vain ensimmäisen kertaluvun napoja. Jos lisäksi pätee, että
$$\lim_{R\to\infty} \int_0^\pi f(Re^{i\varphi})R\,\mathrm{d}\varphi = 0,$$
niin
$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res} f(z) + \pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z=0} \operatorname{Res} f(z).$$
Osoita tämän avulla, että
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$
integroimalla funktiota
$$f(z) = \frac{e^{\mathrm{i}\,z}}{z}.$$

4. Besselin funktiot $J_n(z)$ määritellään Laurentin sarjan
$$\exp\left(\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n$$
kertoimina. Missä rengasalueessa kyseinen sarja suppenee? Kirjoita $J_n(z)$ kompleksitason viivaintegraalina ja osoita, että
$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - z\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$