Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Peltonen, Eirola/Lukkari

Mat-1.403, Matematiikan peruskurssi L 3

Tentti ja uusintavälikokeet 24. 1. 2005

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Tentin tehtävät: 1, 5, 6, 7, 10 ja 11.

1. välikokeen tehtävät: 1-4.

2. välikokeen tehtävät: 5-8.

3. välikokeen tehtävät: 9-12.

1. Olkoon a, b, c kompleksitason pisteitä, joille pätee ehto
$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{a-c}{b-c}.$$
Miten pisteet a, b, c sijaitsevat tasossa?

2. Olkoon f kompleksitason alueen D analyyttinen funktio, jolle pätee
$$f(z) \neq 0, \text{ kaikilla } z \in D.$$
Onko ehdon $g(z) = \log|f(z)|$ määräämä funktio harmoninen alueessa D?

3. Etsi Möbius-kuvaus, joka kuvaa kompleksitason yksikkökiekon
$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$
suoran $x + 2y = 4$ alapuolelle jääväksi puoliavaruudeksi ($x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z$).

4. Määrää ne kompleksitason $\mathbb{C}$ pisteet, joissa sarja
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{1+z})^n$$
määrittelee analyyttisen funktion.

5. Määrää integraalin
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$$
arvo residylausetta käyttäen.

6. Olkoon K kunta, $n \geq 2$ kokonaisluku ja V K-kertoimisten $n \times n$ matriisien muodostama vektoriavaruus. Mitkä seuraavista matriisijoukoista ovat V:n vektorialiavaruuksia?

   (a) Kääntyvien matriisien joukko $\{A \in V|$ Matriisilla A on käänteismatriisi $A^{-1}\}$.

   (b) Kääntymättömien matriisien joukko $\{A \in V|$ Matriisilla A ei ole käänteismatriisia $A^{-1}\}$.

   (c) Matriisijoukko $\{A \in V \mid AB = BA\}$, missä B on jokin K-kertoiminen $n \times n$ matriisi.

7. Olkoon lineaarikuvauksen $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ matriisi tavallisen kannan suhteen muotoa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Määrää kuvauksen A ytimelle ja kuva-avaruudelle jokin kanta.

8. Määrää

(a) vektoriavaruuden

$$\mathbb{C}^3 = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, 3\}$$

vektorialiavaruuden

$$U = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \mid a + b = 0\}$$

ortogonaalikomplementti $U^\perp$ $\mathbb{C}^3$:n tavallisen sisätulon suhteen.

(b) vektoriavaruuden $\mathbb{R}^4$ vektorialiavaruuden

$$V = \mathrm{span}\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$$

ortogonaalikomplementti $V^\perp$ $\mathbb{R}^4$:n tavallisen sisätulon suhteen.

9. Tarkastellaan systeemiä $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k$, kun

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

(a) Onko origo tämän systeemin stabiili tasapainotila?

(b) Ratkaise systeemi alkuehdolla $\boldsymbol{x}^0 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$.

10. Näytä, että systeemi

$$\boldsymbol{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

on täydellisesti ohjattava ja etsi sille säätölaki $u(t) = \boldsymbol{k}^T \boldsymbol{x}(t)$ siten, että takaisinkytketyn systeemin ominaisarvot ovat -2, $-1 + \mathrm{i}$ ja $-1 - \mathrm{i}$.

11. Etsi systeemin

$$\begin{cases} x_1' = -8x_1 + x_2^2 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \end{cases}$$

tasapainopisteet ja linearisoi systeemi näissä. Luokittele näin saamasi lineaariset systeemit. Voidaanko näiden perusteella päätellä alkuperäisen systeemin käyttäytyminen tasapainopisteiden lähellä?

12. Heunin menetelmä tehtävälle $x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0$, on

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_j, x_j), \\ k_2 &= f(t_j + h, x_j + hk_1), \\ x_{j+1} &= x_j + \frac{h}{2}(k_1 + k_2). \end{aligned}$$

Sovella tätä tehtävään $x' = -x, \quad x(0) = 1$. Millä askelpituuden $h > 0$ arvoilla näin diskretoitu systeemi on stabiili?