

Muista täyttää henkilötietosi *jokaiseen* vastauspaperiin. Merkitse myös koulutusohjelma.
Laskimen käyttö ei ole sallittu. Tentti kestää neljä tuntia.

1. Missä kompleksitason pisteissä ehdon

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2i xy$$

määäämä funktio $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ on

- (a) derivoituva?
(b) analyyttinen?

Määäämä funktion f derivaatta niissä pisteissä, joissa se on olemassa.

2. Osoita, että eksponenttifunktion $f : f(z) = e^z$ rajoittumakuvaus kompleksitason joukkoon

$$E = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in [-1, 1], y \in [0, \pi]\}$$

on bijektio. Määäämä joukon E kuvajoukko $f(E)$.

3. Olkoon P yhden reaalimuuttujan reaalilukukertoimisten polynomien muodostama vektoriavaruus. Mitkä seuraavista P :n osajoukoista ovat vektoriavaruuksia?

- (a) $\{p \in P \mid 2p(0) = p(1)\}$
(b) $\{p \in P \mid p(t) \geq 0 \text{ kaikilla } t \in [0, 1]\}$
(c) $\{p \in P \mid p(t) = p(1-t) \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}\}$

4. Etsi $\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$, kun $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

5. Etsi systeemin

$$\begin{cases} x' = y(x^2 - 1) \\ y' = x - y \end{cases}$$

tasapainopisteet ja määäämä niiden tyyppi.

6. Etsi säätölaki, joka antaa ohjaussysteemille

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

ominaisarvot $-1 \pm i$.