Mat-1.403 Matematiikan peruskurssi L3 **Eirola, Peltonen**
Ylimääräiset välikokeet ja tentti 30.1.2006

1. välikokeen tehtävät 1.-4.
2. välikokeen tehtävät 5.-8.
3. välikokeen tehtävät 9.-12.

Tenttitehtävät: 1., 4., 5., 8., 9., 11.

Muista täyttää henkilötietosi *jokaiseen* vastauspaperiin. Merkitse myös koulutusohjelma.
Laskimen käyttö ei ole sallittu. Tentti kestää neljä tuntia.

1. Onko ehdon
$$f(z) = \begin{cases} 0, & z = 0 \\ \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\,\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & z = (x,y) \neq 0 \end{cases}$$
määräämä funktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ origossa
   (a) jatkuva?
   (b) derivoituva?
   (c) analyyttinen?

2. Missä kompleksitason $\mathbb{C}$ alueessa sarja $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}zn}$ määrää analyyttisen funktion? Määrää tämän funktion kuvajoukko.

3. Määrää funktion
$$f : z \mapsto \frac{1}{z(z-1)}$$
Laurentin kehitelmä alueessa $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z-2| < 2\}$.

4. Määrää integraalin
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$$
arvo residylausetta käyttäen.

5. Olkoon $M_n(\mathbb{R})$ reaalilukukertoimisten $n \times n$ -matriisien muodostama vektoriavaruus. Osoita, että joukko
$$V = \{\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{R}) \mid \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T = 0\}$$
on vektoriavaruus ja määrää sen dimensio.

6. Olkoon $M_2(\mathbb{R})$ reaalilukukertoimisten 2×2 -matriisien muodostama vektoriavaruus. Mitkä seuraavista funktioista $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_i$, $(i = 1, 2, 3)$ määräävät sisätulon avaruuteen $M_2(\mathbb{R})$, kun matriiseille $\boldsymbol{A} = \left[\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right]$, $\boldsymbol{B} = \left[\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{smallmatrix}\right]$ asetetaan
   (a) $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle_1 = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$,
   (b) $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle_2 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})$,
   (c) $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle_3 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B})$?

7. Olkoon $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Soveltamalla Gershgorinin lausetta sekä $\boldsymbol{A}$:lle että $\boldsymbol{A}^T$:lle etsi mahdollisimman pieni joukko $D \subset \mathbb{C}$, johon $\Lambda(\boldsymbol{A})$ varmasti sisältyy.

8. Laske matriisin $\boldsymbol{A}^k$ alkiot, kun $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $k \geq 1$.

9. Olkoon $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Etsi mahdollisimman suuri a ja mahdollisimman pieni b, siten että kaikilla $t > 0$ pätee

$$e^{at} \leq \| e^{\boldsymbol{A}t} \| \leq e^{bt} \ .$$

10. Onko origo systeemin

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 - x_1^3 \\ x_2' = 2\,x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

stabiili tai asymptoottisesti stabiili tasapainopiste?

11. Etsi systeemin

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2 \\ x_2' = -1 + x_2^2 \end{cases}$$

tasapainopisteet ja määrää niiden tyyppi.

12. Tehtävälle $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ on kehitetty mm. seuraava Runge-Kutta -menetelmä:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}_1 &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_j) \\ \boldsymbol{k}_2 &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_j + \tfrac{1}{2}\,h\,\boldsymbol{k}_1) \\ \boldsymbol{k}_3 &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_j + h\,(2\boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_1)) \\ \boldsymbol{x}_{j+1} &= \boldsymbol{x}_j + \tfrac{h}{6}\,(\boldsymbol{k}_1 + 4\,\boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3) \ . \end{aligned}$$

Näytä että, kun sitä sovelletaan tehtävään $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, niin pätee:

$$\boldsymbol{x}_1 = e^{\boldsymbol{A}h}\,\boldsymbol{x}_0 + O(h^4) \ .$$