Mat-1.403 Matematiikan peruskurssi L3

Tentti 28.1.2002

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi -kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. $\star$-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Laskimen käyttö ei ole sallittu. Tentti kestää neljä tuntia.

1. Määritteleekö sarja
$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-1)^j$$
jossain kompleksitason alueessa analyyttisen funktion, kun tiedetään että a_j:t ovat kompleksilukuja, joille pätee
$$|a_j| \le 2^j\,, \qquad j = 0, 1, \ldots\ ?$$

2. Määrää integraalin
$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos(bx)\, dx\,,$$
missä $a > 0, b > 0$, arvo integroimalla kompleksitasossa yli sopivan suorakaiteen.

3. Olkoot $q_1, \ldots, q_k$ $\mathbb{C}$-kertoimisen sisätuloavaruuden V yksikkövektoreita siten, että
$$\sum_{i=1}^{k} |\langle q_i, v\rangle|^2 = \|v\|^2 \qquad \text{kaikilla } v \in V\,.$$
Näytä, että $\{q_1, \ldots, q_k\}$ on V:n ortonormaali kanta.

4. Olkoon
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.3 & 0.9 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}.$$
Laske $\boldsymbol{A}$:n ominaisarvot. Olkoon $\boldsymbol{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Näytä, että $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k$ on olemassa ja laske se.
Vihje: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{A}$.

5. Tiedetään, että matriisille $\boldsymbol{A}$ pätee
$$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \sum_{j=0}^{k} \lambda^{-1-j} \boldsymbol{A}^j$$
kaikilla λ, jotka eivät ole $\boldsymbol{A}$:n ominaisarvoja.
   a) Mitkä ovat $\boldsymbol{A}$:n ominaisarvot?
   b) Näytä, että $\boldsymbol{A}^{k+1} = 0$.
   c) Mitä voit päätellä $\boldsymbol{A}$:n Jordan-hajotelmasta, jos $\boldsymbol{A}^k \ne 0$?
   d) Ratkaise Picard-Lindelöfin iteraatiolla diff.yhtälöryhmä $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$.

6. Tarkastellaan ns. BDF2-menetelmää, joka on muotoa
$$\alpha_2 \boldsymbol{x}^{n+2} + \alpha_1 \boldsymbol{x}^{n+1} + \alpha_0 \boldsymbol{x}^n = h\, \boldsymbol{f}(t_{n+2}, \boldsymbol{x}^{n+2})\,.$$
   a) Määrää kertoimet siten, että menetelmä on kertalukua 2.
   b) Osoita, että saamasi menetelmän stabiilisuusalue sisältää vasemman puolitason.