

Mat-1.423 Matematiikan peruskurssi L3

tentti 26.1.2004

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

1. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

- Osoita, että A on tason heijastus ja identifioi aliavaruus, jonka A jättää invariantiksi (kuvaa sen alkiot itselleen).
- Osoita, että AB ja BA ovat tason kiertoja. Ovatko ne samat kuvaukset? Jos ovat, niin millaisia kiertoja ne ovat?

2. Muotoile Cauchy-Schwarzin epäyhtälö. Näytä sen avulla kun $u, v \in \mathbb{C}^n$

- $\|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq \|u\|_1$
- $\|u\|_1 \leq \sqrt{n} \|u\|_2 \leq n \|u\|_\infty$
- $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_\infty \|v\|_1$

3. Laske integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(\pi^2 - x^2)} dx$$

Cauchyn pääarvo residyyjen avulla.

4. Olkoot $1 = z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ n :nnet yksikköjuuret. Osoita

- jos $z_k \neq 1$, niin $1 + z_k + z_k^2 + \dots + z_k^{n-1} = 0$
- $(z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} z^i$

5. Tarkastellaan tehtävää

$$x'(t) = 2x(t) - 3x(t)^2, \quad x(0) = 1 \quad . \quad (1)$$

- Laske kaksi askelta Picard-Lindelöf -iteraatiota alkuarvosta $x^0(t) = 1$.
- Päättele x' :n merkeistä eri alueissa, mikä on tehtävän 1 ratkaisulle $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$.

6. Tarkastellaan 2-askelmenetelmää

$$x_{j+2} - x_{j+1} = h(\gamma f_{j+1} + (1 - \gamma) f_j) \quad .$$

Millä γ :n arvolla menetelmän kertaluku on mahdollisimman korkea? Laske menetelmän stabiilisuusalue tässä tapauksessa.