Teknillinen korkeakoulu Nevanlinna, Peltonen

Mat-1.403, Matematiikan peruskurssi L 3

Tentti, 20.12. 1999

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille

1. opintojakson nimi, päiväys
2. opiskelijanumero + kirjain, **tekstaten** sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet
3. koulutusohjelma (AS, KEM, KON, MAA, MAK, PUU, RYK, TFY, TIK, TUO, SÄH)
4. mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
5. nimikirjoitus.

Perustele kaikki vastauksesi hyvin.

1. Määritteleekö sarja

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{2^{2j}(j!)^2}$$

jossain kompleksitason alueessa analyyttisen funktion?

2. Määrää integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos(2bx) \mathrm{d}x \quad (a > 0,\ b > 0)$$

arvo integroimalla kompleksitasossa yli suorakaiteen.

3. Olkoon V kompleksilukujen joukko tulkittuna reaalilukukertoimisena vektoriavaruutena. Olkoon $A : V \to M_2(\mathbb{R})$ ehdon

$$A(z) = \begin{pmatrix} x + 7y & 5y \\ -10y & x - 7y \end{pmatrix}, \quad z = x + \mathrm{i}y$$

määräämä kuvaus 2×2-matriisien vektoriavaruuteen.

(a) Onko A lineaarinen kuvaus?

(b) Onko A injektio?

(c) Määrää A:n kuva-avaruuden dimensio.

4. Määrääkö ehto

$$< \sum_j a_j x^j, \sum_k b_k x^k >= \sum_{j,k} \frac{a_j b_k}{j + k + 1}$$

sisätulon yhden reaalimuuttujan reaalikertoimisten polynomien muodostamaan vektoriavaruuteen?

5. Tarkastellaan lineaarista differentiaaliyhtälösysteemiä $x' = Ax$, missä

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Ratkaise alkuarvotehtävä, kun $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Kun $a >> 1$, alkuarvotehtävä on kankea. Selitä mitä se tarkoittaa.

(c) Selitä, miksi Eulerin menetelmä ei ole mielekäs numeerinen menetelmä alkuarvotehtävälle, kun ratkaisu halutaan välille $[0, 1]$ ja $a = 1000$.

6. Tarkastellaan differentiaaliyhtälösysteemiä $x' = A(t)x$, missä $A(t)$ on t:n suhteen jatkuva reaalinen $n \times n$-matriisi.

(a) Määrittele systeemin fundamentaalimatriisi $\Phi(t, t_0)$.

(b) Osoita, että jos kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ asetetaan ehto

$$< A(t)x, x > \leq 0, \quad \text{kun } t \geq t_0,$$

niin tällöin pätee

$$||\Phi(t, t_0)|| \leq 1, \quad \text{kun } t \geq t_0.$$