Teknillinen korkeakoulu Peltonen, Eirola

Mat-1.403, Matematiikan peruskurssi L 3

Tentti, 17.4. 1999

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille
1. opintojakson nimi, päiväys
2. opiskelijanumero + kirjain, **tekstaten** sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet
3. koulutusohjelma (AS, KEM, KON, MAA, MAK, PUU, RYK, TFY, TIK, TUO, SÄH)
4. mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
5. nimikirjoitus.

1. Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ehdon

$$f(x + \mathrm{i}y) = ax + by + \mathrm{i}(cx + dy) \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

määräämä funktio. Esitä f muuttujien z ja $\bar{z}$ funktiona ja osoita, että f on derivoituva origossa jos ja vain jos se on vain muuttujan z lineaarinen funktio.

2. Esitä lausekkeen

$$f(z) = \frac{1}{(1 - z)(2 - z)}$$

määräämän funktion Laurentin kehitelmät joukoissa

(a) $\{z \in \mathbb{C} | \ |z| < r\}$,

(b) $\{z \in \mathbb{C} | \ r' < |z| < s\}$ ja

(c) $\{z \in \mathbb{C} | \ s' < |z|\}$

niillä $r, r', s, s' \in \mathbb{R}$, joilla ovat olemassa.

3. Olkoon P yhden reaalimuuttujan reaalilukukertoimisten polynomien muodostama vektoriavaruus. Mitkä seuraavista joukoista ovat P:n vektorialiavaruuksia. Perustele vastauksesi.

(a) $\{x \in P | \ 2x(0) = x(1)\}$

(b) $\{x \in P | \ x(t) \geq 0$ kaikilla $0 \leq t \leq 1\}$

(c) $\{x \in P | \ x(t) = x(1 - t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}\}$

4. Olkoon $\{e_1, \ldots, e_k\}$ mielivaltainen ortonormaali joukko kompleksilukukertoimisessa sisätuloavaruudessa V. Osoita, että pätee

$$\sum_{i=1}^{k} | < e_i, v > |^2 \leq ||v||^2 \text{ kaikilla } v \in V.$$

5. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ siten, että toisen kertaluvun systeemin $x''(t) = Ax(t)$ tasapainotila $x = x' = 0$ on stabiili. Mitä voit sanoa A:n ominaisarvoista? Vihje: palauta systeemi $2n$-dimensioiseksi ensimmäisen kertaluvun systeemiksi.

6. Hahmottele tasoon jokin vektorikenttä, jolla on 1 epästabiili jaksollinen ratkaisu ja sen sisällä 3 tasapainopistettä, joista 1 on satulapiste, 1 stabiili fokus ja yksi epästabiili fokus. Piirrä myös kuvaan ne ratkaisukäyrät, jotka lähestyvät satulapistettä, kun $t \to \infty$ tai $t \to -\infty$.