Teknillinen korkeakoulu — Nevanlinna, Peltonen

Mat-1.403, Matematiikan peruskurssi L 3

Tentti, 15.4. 2000

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille

1. opintojakson nimi, päiväys
2. opiskelijanumero + kirjain, **tekstaten** sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet
3. koulutusohjelma (AS, KEM, KON, MAA, MAK, PUU, RYK, TFY, TIK, TUO, SÄH)
4. mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
5. nimikirjoitus.

1. Määritellään funktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ asettamalla

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^{4/3}y^{5/3} + \mathrm{i}x^{5/3}y^{4/3}}{x^2+y^2}, & z = x + \mathrm{i}y \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

   (a) Ovatko Cauchy-Riemannin yhtälöt voimassa origossa?

   (b) Onko funktio f derivoituva origossa?

2. Määrää integraalin

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin^2\theta)^2}$$

   arvo residylauseen avulla.

3. Millä seuraavista vektoriavaruuksista pätee $V = U \oplus W$?

   (a) $V = \mathbb{C}^3$, $U = \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \ |a+b=0\}$, $W = \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \ |a=b=c\}$

   (b) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \mathrm{sp}\{(1,0,1,0),\ (0,1,0,1)\}$, $W = \mathrm{sp}\{(1,0,2,0),\ (0,1,0,2)\}$.

4. Olkoon V kompleksilukukertoiminen sisätuloavaruus ja T sen itseadjungoitu lineaarikuvaus. Todista seuraavat väitteet.

   (a) $||\alpha + \mathrm{i}T\alpha|| = ||\alpha - \mathrm{i}T\alpha||$ kaikilla $\alpha \in V$.

   (b) $\alpha + \mathrm{i}T\alpha = \beta + \mathrm{i}T\beta$ jos ja vain jos $\alpha = \beta$.

KÄÄNNÄ!

5. Yksinkertainen versio ns. Picard–Lindelöfin lauseesta sanoo seuraavaa:

Oletamme, että $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on Lipschitz–jatkuva, eli on olemassa vakio L siten, että

$$||f(x) - f(y)|| \leq L||x - y||, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Silloin alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = a \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $x(t)$ kaikilla $t > 0$.

a) Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} x' = x^2, & 0 < t < 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

b) Tarkastele a)–kohdan tilannetta yllä olevan Picard–Lindelöfin lauseen kannalta.

6. Olkoon A reaalinen $n \times n$–matriisi siten, että

$$\mu(A) := \max_{||x||=1} < Ax, x > \quad \leq 0.$$

a) Olkoon $x(t)$ alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ratkaisu. Näytä, että $||x(t)|| \leq ||x_0||$ kaikilla $t \geq 0$. (Tässä $||x||^2 =< x, x >$.)

b) a)–kohdan alkuarvotehtävä diskretoidaan trapetsimenetelmällä, jolloin saadaan rekursio

$$x^{k+1} = x^k + \frac{h}{2}(Ax^{k+1} + Ax^k), \quad k \geq 0.$$

Näytä, että

$$||x^{k+1}|| \leq ||x^k||.$$