

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille

1. opintojakson nimi, päiväys
2. opiskelijanumero + kirjain, tekstaten sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet
3. koulutusohjelma (AS, KEM, KON, MAA, MAK, PUU, RYK, TFY, TIK, TUO, SÄH)
4. mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
5. nimikirjoitus.

1. Olkoon  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ehdon

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z)}{\bar{z}}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

määräämä funktio.

- (a) Osoita, että Cauchy-Riemannin yhtälöt ovat voimassa origossa.
- (b) Onko  $f$  analyyttinen origossa?

2. Määrää integraalin

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx, \quad a > 0,$$

arvo residylauseen avulla. Perustele kaikkien laskuissa esiintyvien integraalien arvot.

3. (a) Olkoon  $A$  ja  $B$   $n$ -ulotteisen vektoriavaruuden lineaarisia kuvauksia. Osoita, että jos  $AB = 0$ , niin pätee

$$\operatorname{Rank}(A) + \operatorname{Rank}(B) \leq n.$$

- (b) Osoita, että jokaista  $n$ -ulotteisen vektoriavaruuden lineaarista kuvausta  $A$  kohti löytyy lineaarinen kuvaus  $B$  siten, että

$$\operatorname{Rank}(A) + \operatorname{Rank}(B) = n.$$

4. Olkoon  $A$  äärellisulotteisen sisätuloavaruuden lineaarinen kuvaus.

- (a) Olkoon  $\alpha, \beta$  kompleksilukuja siten, että  $|\alpha| = |\beta| = 1$ . Onko kuvaus  $\alpha A + \beta A^*$  normaali?
- (b) Olkoon  $\|Ax\| = \|A^*x\|$  kaikilla  $x$ . Onko  $A$  normaali?

5. Määrittele käsitteet Ljapunovin funktio ja tarkka Ljapunovin funktio. Esittele Ljapunovin stabiilisuuslause. Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_2(x_3 - 1) \\ x'_2 = -x_1(x_3 - 1) \\ x'_3 = -x_3^3 \end{cases}$$

Osoita, että origo on stabiili näyttämällä, että  $V(x) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2$  on Ljapunovin funktio, kun  $a, b$  ja  $c$  valitaan sopivasti.

6. Ratkaistaan tehtävää  $x' = f(t, x)$  numeerisesti jollain menetelmällä. Määrittele mitä tarkoitetaan menetelmän stabiilisuusalueella. Tarkastellaan BDF2 menetelmää

$$\frac{3}{2}x^{n+2} - 2x^{n+1} + \frac{1}{2}x^n = hf(t_{n+2}, x^{n+2})$$

Osoita, että koko negatiivinen reaaliakseli kuuluu stabiilisuusalueeseen.