

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille

1. opintojakson nimi, päiväys
2. opiskelijanumero + kirjain, tekstaten sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet
3. koulutusohjelma (AS, KEM, KON, MAA, MAK, PUU, RYK, TFY, TIK, TUO, SÄH)
4. mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
5. nimikirjoitus.

1. Määää funktion

$$z \mapsto \frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2}$$

Laurentin kehitelmä alueessa  $\{z \mid |z - 1| > 1\}$ .

2. Määää integraalin

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

arvo residylauseen avulla. Vihje: Integroï funktiota  $z \mapsto (\sin \pi z)^{-1} e^{i\pi z^2}$  yli nelikulmion, jonka kärkipisteet ovat muotoa  $\pm \frac{1}{2} \pm R\alpha$  ja  $\alpha = e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

3. Olkoon  $V$  äärellisulotteinen vektoriavaruus,  $U$  ja  $Z$  sen vektorialiavaruuksia. Päteekö kaava

$$\dim(U + Z) = \dim U + \dim Z - \dim(U \cap Z)?$$

4. Formuloi ja todista sisätuloavaruuden Schwarzin epäyhtälö.
5. Ratkaise Picardin-Lindelöfin iteraatiolla alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = a \end{cases}$$

kun  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  ja  $a = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ .

6. Olkoon funktio  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuvasti derivoituva ja konvekxi. Osoita, että differentiaaliyhtälön  $x' = -\nabla\varphi(x)$  kaksi mielivaltaista ratkaisua toteuttavat epäyhtälön

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \|x(s) - \tilde{x}(s)\|$$

kaikilla  $t \geq s$ . Tässä  $\|\cdot\|$  on  $\mathbb{R}^n$ :n tavallisen sisätulon määräämä normi.