

**Mat-1.403 Matematiikan peruskurssi L3**

Tentti 6.4.2002

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ★-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Laskimen käyttö ei ole sallittu. Tentti kestää neljä tuntia.

1. Määrää integraalin

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{a + b \sin(\theta)}$$

arvo residylauseen avulla, kun  $a > b > 0$ .

2. Tarkastellaan kuvausta

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto e^{z^2}.$$

- Missä se on analyyttinen?
- Missä konforminen?
- Esitä (piirrä myös kuva!) minne kuvautuu puolisuora  $z = re^{i\varphi}$ , kun  $r > 0$  ja  $\varphi$  on kiinteä,  $\varphi \in (0, \pi/2)$ .

3. Etsi kanta avaruudelle
- $N(\mathbf{A})^\perp$
- , kun
- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- .

4. Onko
- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
- positiividefiniitti?

5. Olkoon
- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- ja
- $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- kaksi
- $2 \times 2$
- matriisia.

- a) Määrää funktiot
- $e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}$
- ,
- $e^{t\mathbf{A}}$
- ja
- $e^{t\mathbf{B}}$
- .

- b) Onko tulos

$$e^{t(\mathbf{C}+\mathbf{D})} = e^{t\mathbf{C}}e^{t\mathbf{D}} + \mathcal{O}(t^2) \text{ kun } t \rightarrow 0$$

totta kaikilla  $n \times n$ -matriisipareilla  $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ ? Perustele!

- c) Olkoon vuorotellen
- $\mathbf{M} = \mathbf{A}$
- ,
- $\mathbf{M} = \mathbf{B}$
- ja
- $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$
- . Milloin origo on tehtävän
- $\mathbf{x}' = \mathbf{M}\mathbf{x}$
- asympotoottisesti stabiili tasapainopiste? Perustele!

6. Tarkastellaan eksplisiittisiä 2-askelmenetelmiä

$$\alpha_2 \mathbf{x}^{n+2} + \alpha_1 \mathbf{x}^{n+1} + \alpha_0 \mathbf{x}^n = h\beta_1 \mathbf{f}^{n+1} + h\beta_0 \mathbf{f}^n.$$

- Määrää kertoimet siten, että kertaluku on mahdollisimman korkea (käytä normeerausta  $\beta_0 + \beta_1 = 1$ ).
- Määrittele yleisen moniaskelmenetelmän stabiilisuusalue  $S$ .
- Näytä, että a)-kohdan tapauksessa  $0 \notin S$ .