Teknillinen korkeakoulu | Nevanlinna, Peltonen

Mat-1.403, Matematiikan peruskurssi L 3

Tentti, 4.9. 2000

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille

1. opintojakson nimi, päiväys
2. opiskelijanumero + kirjain, **tekstaten** sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet
3. koulutusohjelma (AS, KEM, KON, MAA, MAK, PUU, RYK, TFY, TIK, TUO, SÄH)
4. mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
5. nimikirjoitus.

1. Olkoon annettu kompleksimuuttujan polynomi
$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k$$
ja reaaliluku $r \in (0,1)$. Osoita, että löytyy luonnollinen luku n_0 siten, että jos $n > n_0$, niin polynomilla P_n ei ole nollakohtia kiekossa $B(0,r)$. Vihje: Kirjoita polynomi P_n toisen polynomin derivaattana.

2. Määrää integraalin
$$\int_\gamma (z\mathrm{e}^{\frac{3}{z}} + \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3})\mathrm{d}z$$
arvo, missä $\gamma(t) = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$.

3. Osoita, että ehdon
$$U(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} t+x & y+\mathrm{i}z \\ y-\mathrm{i}z & t-x \end{pmatrix}$$
määräämä kuvaus $U : \mathbb{R}^4 \to H$ on lineaarinen bijektio euklidiselta avaruudelta $\mathbb{R}^4$ itseadjungoitujen kompleksisten 2×2- matriisien reaalilukukertoimiseen vektoriavaruuteen H.

4. Määrää lineaarikuvausta $A = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} : V \to V$ vastaavan matriisin Jordanin muoto. Vektoriavaruudessa
$$V = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \mid f \text{ enintään astetta 2 oleva kahden muuttujan polynomi}\}$$
valitaan tavanomainen kanta.

5. Olkoon x differentiaaliyhtälöryhmän $x' = iBx, \quad x(0) = x_0$ ratkaisu, missä matriisi B toteuttaa $B = B^*$. Näytä, että $||x(t)|| = ||x_0||$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

6. Tiedetään, että matriisille A pätee
$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{k} \lambda^{-1-j}A^j$$
kaikilla λ, jotka eivät ole A:n ominaisarvoja.

   a) Mitkä ovat A:n ominaisarvot? (1 p)

   b) Näytä, että $A^{k+1} = 0$. (1 p)

   c) Mitä voit päätellä A:n Jordan–hajotelmasta, jos $A^k \neq 0$? (2 p)

   d) Ratkaise Picard–Lindelöfin iteraatiolla diff.yhtälöryhmä $x' = Ax, \quad x(0) = x_0$. (2 p)