Teknillinen korkeakoulu — Nevanlinna, Peltonen

Mat-1.403, Matematiikan peruskurssi L 3

Tentti, 3.9. 2001

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin kysytyt tiedot!
Koulutusohjelmalyhenteet: AS, KEM, KON, MAA, MAK, PUU, RYK, TFY, TIK, TUO, SÄH

1. Tarkastellaan kompleksista eksponenttikuvausta $f : z \mapsto \mathrm{e}^z$.

   (a) Missä f on määritelty?

   (b) Mikä on f:n kuvajoukko?

   (c) Missä f on analyyttinen?

   (d) Missä f on konforminen?

   (e) Mihin f kuvaa suoran $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = \frac{\pi}{4}\}$?

   (f) Mihin f kuvaa joukon $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \frac{\pi}{4}\}$?

2. Määrää integraalin

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{2 - \cos\theta}$$

   arvo residylauseen avulla.

3. Olkoon V, W äärellisulotteisia vektoriavaruuksia ja $f : V \to W$ lineaarinen kuvaus. Jos $W' \subset W$ on mielivaltainen vektorialiavaruus niin osoita, että pätee

$$\dim(f^{-1}(W')) = \dim(f(V) \cap W') + \dim(\operatorname{Ker} f).$$

4. Olkoon P_4 enintään astetta kolme olevien reaalipolynomien muodostama vektoriavaruus. Varustetaan P_4 sisätulolla

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

   (a) Etsi vakiopolynomien muodostaman vektorialiavaruuden ortogonaalikomplementti.

   (b) Sovella Gram-Schmidt ortonormeerausta P_4:n tavanomaiseen kantaan $\{1, x, x^2, x^3\}$.

KÄÄNNÄ!

5. Tarkastellaan ns. BD2–menetelmää:

$$\alpha_2 x^{n+2} + \alpha_1 x^{n+1} + \alpha_0 x^n = hf(x^{n+2})$$

missä kertoimet α_i ovat sellaiset, että menetelmän kertaluku on 2.

(a) Määrää kertoimet α_i.

(b) Määrittele yleisen k–askelmenetelmän stabiilisuusalue S.

(c) Tiedetään, että kaikille k–askelmenetelmille pätee

$$\partial S \subset \Gamma \text{ , missä } \Gamma = \left\{ \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})} \mid \theta \in [-\pi, \pi] \right\}$$

$$\text{kun} \quad \rho(\xi) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \xi^j, \quad \sigma(\xi) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \xi^j.$$

Todista tämän avulla, että BD2:lle pätee $\mathbb{C}_- \subset S$
(missä $\mathbb{C}_- := \{z \mid Re\ z \leq 0\}$).

6. Tarkastellaan lineaarista differentiaaliyhtälösysteemiä $x' = Ax$, missä

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Ratkaise alkuarvotehtävä, kun $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Kun $a >> 1$, alkuarvotehtävä on kankea. Selitä mitä se tarkoittaa.

(c) Selitä, miksi Eulerin menetelmä ei ole mielekäs numeerinen menetelmä alkuarvotehtävälle, kun ratkaisu halutaan välille $[0, 1]$ ja $a = 1000$.