

## Mat-1.423 Matematiikan peruskurssi L3

tentti 3.4.2004

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

1. Laske funktion

$$f(z) = \frac{1-z}{z-2}$$

Taylorin kehitelmä  $z_0 = 1$  kehityspisteenä. Anna suppenemissäde. Laske myös  $f$ :n Laurent-kehitelmä alueessa  $|z-1| > 1$ .

2. Laske Cauchyn pääarvo integraalille

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 1)}$$

3. Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja -vektorit ( $i = \sqrt{-1}$ ). Diagonalisoi  $A$ . Laske  $e^A$  diagonalisoinnin avulla ja suoraan määritelmästä.

4. Muotoile Schurin hajotelma matriisille  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Selitä kaikki tuloksessa esiintyvät käsitteet. Näytä sen avulla, että matriisin determinantti on sen ominaisarvojen tulo.

5. Ratkaise differenssiyhtälö

$$6y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = 0 \quad , \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 1 \quad .$$

Onko  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k$  olemassa?

6. Etsi systeemin

$$\begin{cases} x_1' = -4x_1 + x_2^3 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \end{cases}$$

tasapainopisteet ja linearisoi systeemi näissä. Minkä laatuisia lineaariset systeemit ovat? Voidaanko tämän perusteella päätellä alkuperäisen systeemin käyttäytyminen tasapainopisteiden ympäristössä? Piirrä kuva.