Teknillinen korkeakoulu Peltonen, Eirola
Mat-1.403, Matematiikan peruskurssi L 3
Tentti, 2.9. 1999

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille
1. opintojakson nimi, päiväys
2. opiskelijanumero + kirjain, **tekstaten** sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet
3. koulutusohjelma (AS, KEM, KON, MAA, MAK, PUU, RYK, TFY, TIK, TUO, SÄH)
4. mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
5. nimikirjoitus.

1. Etsi ylemmän puolitason $\{z = (x,y) \in \mathbb{C} \mid y = \operatorname{Im} z > 0\}$ harmoninen funktio f, joka on jatkuva joukossa $\{z = (x,y) \in \mathbb{C} \mid y = \operatorname{Im} z \geq 0\}$ ja jolle pätee
$$f(x,0) = \frac{2x^3}{x^2+4}$$
kaikilla reaalisilla x.

2. Määrää integraalin
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{a + b\sin\theta}, \quad (a > b > 0)$$
arvo residylausetta käyttäen.

3. Olkoon $V = \{x \mid x \text{ on kuvaus } \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ ja $U = \{x \in V \mid x(0) = x(1) = 0\}$. Osoita, että V/U on äärellisulotteinen ja määrää sille kanta ja dimensio.

4. Osoita, että yhden reaalimuuttujan reaalikertoimisten polynomien muodostama vektoriavaruus V voidaan varustaa sisätulolla
$$< P(x), Q(x) >= \int_0^\infty e^{-x} P(x) Q(x) \mathrm{d}x,$$
$P,\ Q \in V$. Määrää tämän sisätulon suhteen kolme alinta astetta olevaa ortogonaalista polynomia, joiden korkeimman asteen kerroin on yksi. Vihje: Totea ensin, että pätee $\int_0^\infty x^n e^{-x} \mathrm{d}x = n!$ kaikilla n.

5. Etsi systeemille
$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 \end{cases}$$
ei-triviaali funktio V, joka pysyy vakiona kaikkia ratkaisukäyriä pitkin (t.s. $\dot{V} = 0$). Hahmottele tämän avulla ratkaisujen käyttäytyminen. Laske myös tasapainotilat. Mitkä näistä ovat stabiileja?

6. Yhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisemiseksi tarkastellaan numeerista menetelmää, jossa vuorotellen otetaan eksplisiittinen ja implisiittinen Euler–askel:
$$\begin{cases} x^{n+\frac{1}{2}} &= x^n + \frac{h}{2} f(x^n) \\ x^{n+1} &= x^{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f(x^{n+1}) \, . \end{cases}$$
Mikä on tällaisen menetelmän kertaluku?