Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Nevanlinna/Eirola

Mat-1.403 Matematiikan peruskurssi L3

Tentti 2.9.2002

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ⋆-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 4h.

1. Johda kaava
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\,\pi$$
perustellen välivaiheet.

2. Olkoon $f[0,\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ jatkuva funktio, jolle on olemassa vakiot $M<\infty$ ja $a<\infty$ siten, että $|f(t)|\le Me^{at}$ jokaisella $t\ge 0$.
   (a) Määrittele funktion f Laplacen muunnos $\mathcal{L}f$.
   (b) Todista, että $g: s\mapsto \mathcal{L}f(s)$ on analyyttinen, kun $\operatorname{Re} s > a$.

3. Olkoon $\mathcal{P}_2$ toisen asteen kahden muuttujan homogeenisten, eli muotoa
$$p(x) = \alpha x_1^2 + \beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2$$
olevien polynomien joukko, ja olkoon $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Määritellään kuvaus $L: \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ kaavalla $(Lp)(x) = p(Mx)$. Näytä, että L on lineaarikuvaus, ja laske sen matriisi kannan $\{x_1^2, x_1x_2, x_2^2\}$ suhteen.

4. Määritellään $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, missä $\alpha\in\mathbb{R}$. Millä vakion α arvoilla
   (a) jono $\{A(\alpha)^k \mid k\in\mathbb{N}\}$ on rajoitettu?
   (b) raja-arvo $B(\alpha) = \lim_{k\to\infty} A(\alpha)^k$ on olemassa? Laske $B(\alpha)$ näissä tapauksissa.

5. Tarkastellaan differentiaaliyhtälösysteemiä $x'(t) = Ax(t)$, missä $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ ja $a,b\in\mathbb{R}$. Millä vakioiden a ja b arvoilla origo on systeemin asymptoottisesti stabiili tasapainopiste?

6. Kun ns. Heunin kaavaa sovelletaan yhtälöön $x'(t) = \lambda x(t)$ askelpituudella $h>0$, saadaan differenssiyhtälö $x_{n+1} = R(h\lambda)x_n$, missä $R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}$.
   (a) Määrittele yleisen yksiaskelmenetelmän *stabiilisuusalue* $S\subset\mathbb{C}$.
   (b) Määrää ja piirrä kuva Heunin menetelmän stabiilisuusalueesta.