Mat-1.403 Matematiikan peruskurssi L3 **Eirola/Eloranta**
Tentti 1.9.2003

Muista täyttää henkilötietosi *jokaiseen* vastauspaperiin.
Merkitse myös koulutusohjelma
(AUT, TFY, TIK, INF, TUO, EST, TLT, KON, KEM, MAK, PUU, ARK, MAR, MAA, RYK)
Laskimen käyttö ei ole sallittu. Tentti kestää neljä tuntia.

1. Esitä lausekkeen $f(z) = \frac{1}{(1-z)(2-z)}$ määräämän funktion Laurentin kehitelmät joukoissa
   a) $\{z \mid |z| < r\}$,
   b) $\{z \mid r' < |z| < s\}$,
   c) $\{z \mid s' < |z|\}$,
   niillä positiivisilla r, r', s, s', joilla kehitelmät ovat olemassa.

2. Laske
$$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^3}, \qquad a \in \mathbb{R},$$
   residylauseen avulla.

3. Etsi avaruuksille $R(\boldsymbol{A})$ ja $N(\boldsymbol{A})^\perp$ ortonormaalit kannat, kun $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Olkoot $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3$ matriisin
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & i \\ -2 & -i & -1 \end{bmatrix}$$
   ominaisarvot. Etsi välit $[\alpha_1, \beta_1]$ ja $[\alpha_3, \beta_3]$ siten, että $\beta_1 < \alpha_3$ ja varmuudella pätee: $\lambda_1 \in [\alpha_1, \beta_1]$ ja $\lambda_3 \in [\alpha_3, \beta_3]$. Perustele valintasi

5. Olkoon $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ siten, että toisen kertaluvun systeemin $\boldsymbol{x}''(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)$ tasapainotila $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' = 0$ on stabiili. Mitä voit sanoa matriisin $\boldsymbol{A}$ ominaisarvoista?
   Vihje: palauta systeemi $2n$–dimensioiseksi ensimmäisen kertaluvun systeemiksi.

6. Olkoon $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ siten, että $\langle \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}\,,\, \boldsymbol{x} \rangle \le 0$ kaikilla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.
   a) Olkoon $\boldsymbol{x}(t)$ alkuarvotehtävän
$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0,$$
   ratkaisu. Näytä, että $|\boldsymbol{x}(t)| \le |\boldsymbol{x}_0|$ kaikilla $t > 0$.
   b) Edellä oleva alkuarvotehtävä diskretoidaan keskipistesäännöllä, jolloin saadaan implisiittinen rekursio
$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \tfrac{h}{2}\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^{k+1}), \qquad \boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}_0,$$
   ratkaisu. Näytä, että $\left|\boldsymbol{x}^k\right| \le |\boldsymbol{x}_0|$ kaikilla $k > 0$.