

Mat-1.403 Matematiikan peruskurssi L 3

Tentti 28.8. 2006

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

1. Onko ehdon

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\bar{z}}, & \text{kun } z = x + iy \neq 0 \\ 0, & \text{kun } z = 0 \end{cases}$$

määrittämä funktio $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ origossa

- (a) jatkuva?
- (b) derivoituva?
- (c) analyyttinen?

Ovatko Cauchy-Riemannin yhtälöt voimassa origossa?

2. Olkoot K_1 ja K_2 kaksi kompleksitason pistevierasta R_i -säteistä ($i = 1, 2$) ympyrää, joilla on eri keskipistet q_1 ja q_2 . Osoita, että ympyrät K_1 ja K_2 voidaan kuvata samankeskeisiksi ympyröiksi Möbius-kuvauksella. Vihje: Piirrä kuva ja totea ensin, että löytyy piste $z \in \mathbb{C}$, siten, että pätee $I_1(z) = I_2(z)$ kun $I_i : I_i(z) = \frac{R_i^2}{\bar{z} - q_i} + q_i$ on inversio ympyrän K_i suhteen.
3. Olkoon $M_3(\mathbb{C})$ kompleksilukukertoimisten 3×3 -matriisien muodostama vektoriavaruus. Onko joukko

$$\{A \in M_3(\mathbb{C}) \mid A + A^* = 0\}$$

- (a) \mathbb{R} -kertoiminen
- (b) \mathbb{C} -kertoiminen

vektoriavaruus? Myönteisessä tapauksessa määrää avaruuden dimensio ja muodosta jokin kanta.

4. Olkoot $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & i \\ -2 & -i & -1 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot. Etsi välit $[\alpha_1, \beta_1]$ ja $[\alpha_3, \beta_3]$ siten, että $\beta_1 < \alpha_3$ ja varmuudella pätee: $\lambda_1 \in [\alpha_1, \beta_1]$ ja $\lambda_3 \in [\alpha_3, \beta_3]$. Perustele valintasi

5. Näytä, että ohjaussysteemi

$$\mathbf{x}^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}^k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

on täydellisesti ohjattava ja etsi sille säätölaki $u_k = \mathbf{v}^T \mathbf{x}^k$ siten, että takaisinkytketyn systeemin ominaisarvot ovat $-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}$.

6. Etsi systeemille

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 \end{cases}$$

ei-triviaali funktio V , joka pysyy vakiona kaikkia ratkaisukäyriä pitkin (t.s. $\dot{V} = 0$). Hahmottele tämän avulla ratkaisujen käyttäytyminen. Laske myös tasapainotilat. Mitkä näistä ovat stabiileja?