

Mat-1.403 Matematiikan peruskurssi L 3

2. välikoe 14. 11. 2005

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Laskimet ovat kiellettyjä.

1. Olkoon A reaalinen 2×2 matriisi.

- (a) Mitkä seuraavista joukoista S_i ovat reaalisten 2×2 matriisien muodostaman vektoriavaruuden $M_2(\mathbb{R})$ vektorialiavaruuksia?

$$S_1 = \{B \in M_2(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$$

$$S_2 = \{B \in M_2(\mathbb{R}) \mid AB \neq BA\}$$

$$S_3 = \{B \in M_2(\mathbb{R}) \mid BA = \bar{0}\}$$

- (b) Määrä (a) -kohdan vektorialiavaruuksien S_i dimensiot, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Tarkastellaan vektoriavaruutta

$$V = \{f \mid f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ jatkuva}\}.$$

- (a) Mitkä seuraavista ehdoista määräävät lineaarisen kuvauksen $L_i : V \rightarrow \mathbb{R}$?

$$L_1(f) = f(0)$$

$$L_2(f) = \left(\int_0^1 (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$L_3(f) = \int_0^1 f(x) dx + (f(0))^2$$

- (b) Määrä (a) -kohdan lineaaristen kuvausten kuva-avaruus $\text{Im}(A) = A(V)$ ja ydin $\text{Ker}(A) = N(A)$.

3. Tarkastellaan yhden reaalimuuttujan reaalilukukertoimisten polynomien muodostamaa vektoriavaruutta

$$V = \{p \text{ on reaalipolynomi} \mid \deg(p) \leq 2\}.$$

Asetetaan

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^3 p(x_i)q(x_i),$$

kun $p, q \in V$ ja $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

- (a) Osoita, että $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ on sisätuloavaruus.

- (b) Muodosta sisätuloavaruudelle V ortonormaali kanta $\{u_0, u_1, u_2\}$, jolle pätee $\text{sp}\{u_0\} = \text{sp}\{p_0\}$ ja $\text{sp}\{u_0, u_1\} = \text{sp}\{p_0, p_1\}$, kun $\{p_0, p_1, p_2\}$ on V :n tavallinen kanta $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2$.

4. Etsi matriisiin

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit. Onko A diagonalisoituva?