Osa IX

Z–muunnos

Johdanto

- Z–muunnos on Laplace-muunnoksen diskreetti versio. Z–muunnosta voidaan käyttää differenssiyhtälöiden ratkaisemiseen.
- Differenssiyhtälöitä voidaan käyttäää differentiaaliyhtälöiden numeerisessa approksimoinnissa ja niitä esiintyy myös mm. digitaalisessa signaalinkäsittelyssä ja algoritmianalyysissä.
- Muunnos syntyi differenssiyhtälöitä soveltaneen tekniikan alan tutkimuksen yhteydessä 1940-luvulla.
- Nimitys tulee muunnoksessa esiintyvästä muuttujasta z, ja sen on antanut Columbian yliopistossa vaikuttanut tilastotieteilijä John Raggazini tutkimusryhmineen 1952.

Diskreetit funktiot

Määritelmä

Sanomme, että funktio f on *diskreetti*, jos se on määritelty vain (numeroituvassa) diskreetissä joukossa (D), esimerkiksi reaaliakselin tai kompleksitason erillisissä pisteissä. Rajoitumme tässä vain $\mathbb{C}$-arvoisiin funktioihin.

- Lukujono on diskreetti funktio $k \mapsto x_k$; jokaista $k \in \mathbb{N}$ vastaa luku x_k.
- Toisaalta jokainen diskreetti funktio on lukujono: Numeroimalla joukon D pisteet $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ voidaan tarkastella diskreettiä funktiota $g : n \mapsto x_n \mapsto f(x_n)$ millä tahansa funktiolla f joka on määritelty joukossa D. g on itse asiassa kahden diskreetin funktion yhdiste.

"Lukujonon Laplace-muunnos"

Lukujono $x(k)$ on funktiona määritelty vain luonnollisilla luvuilla. Emme siis suoraan voi laskea Laplace–muunnosta $\int x(t)e^{-st}dt$. Asettamalla $x(t) = 0$, kun $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, integraali suppenee mutta saamme muunnoksen arvoksi aina nolla. Osoittautuu että toimiva tulkinta on muokata integraalia ja asettaa integraalissa diskreettien pisteiden painoksi yksi ja muiden pisteiden painoksi nolla: Jonon $x(k)$ **Laplace-muunnos diskreetillä painofunktiolla** on

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x\}(s) &= \int_0^\infty x(t)e^{-st}\underbrace{\delta(t-k)}_{\text{paino}}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)e^{-sk} \\ &= \sum_k x(k)\underbrace{e^{-sk}}_{=z^{-k}} \overset{z=e^s}{=} \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k},\end{aligned}$$

eli **jonon Z–muunnos**. Huomaa, että

$$s \in \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \alpha\} \Leftrightarrow z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| > e^{\alpha}\}.$$

Z–muunnos

Määritelmä

Oletetaan, että $x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ on funktio (lukujono). Määritellään funktion (lukujonon) **Z–muunnos**

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x\}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}, \qquad z \in \mathbb{C},\ |z| > R$$

kaikille riittävän suurelle R jotta sarja suppenee.

Merkitsemme siis jonon $x(k)$ Z–muunnosta tyypillisesti isolla kirjaimella X. Voimme myös tulkita Z–muunnoksen kuvaukseksi jonosta potenssisarjaksi

$$\mathcal{Z} : \{x_k\} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x_k w^k, \quad \text{jossa } w = 1/z.$$

Z–muunnoksen ominaisuuksia

- Lineaarisuus: jos $\mathcal{Z}\{x\} = X$ ja $\mathcal{Z}\{y\} = Y$ niin
$$\mathcal{Z}\{ax + by\} = aX + bY \qquad \forall a, b \in \mathbb{C}$$
- Vakiofunktio eli vakiojono $x(k) = 1$
$$\mathcal{Z}\{x\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$
- Geometrinen jono $x(k) = w^k$:
$$\mathcal{Z}\{x\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} w^k = \frac{1}{1 - (z/w)^{-1}} = \frac{z}{z-w}$$
- Geometrisella funktiolla, $k \mapsto w^k$, (geometrisella jonolla) kertominen: $y(k) = w^k x(k)$
$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y\}(z) = \mathcal{Z}\{x\}(\frac{z}{w}). = X(\frac{z}{w}).$$

Z–muunnoksen ominaisuuksia

Z–muunnokselle pätee kaikki Laplace-muunnosta vastaavat ominaisuudet (onhan Z–muunnos oikeastaan Laplace-muunnos erityistapauksessa).

Delta-funktiota vastaa nyt diskreetti deltafunktio (jono)
$$\delta = \{1, 0, 0, 0, \dots\}$$
ja **konvolutiota** summa:
$$(x * y)_k = \int_0^{\infty} x(t)y(k-t)\,\delta(t-k)dt = \sum_{j=0}^{\infty} x_j y_{k-j}.$$
jolloin suoraan kahden sarjan summakaavasta seuraa
$$\mathcal{Z}\{x\}\mathcal{Z}\{y\} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \underbrace{\sum_{j=0}^{k} x_k y_{k-j}}_{(x*y)_k} = \mathcal{Z}\{x*y\}.$$

Siirros

Lukujonolle on helppo määrittää siirros: Lukujonosta $x(n) \sim \{x_n\}$ muodostetaan uusi vasemmalle siirretty lukujono $y(n)$ kirjoittamalla
$$y(n) = x(n+1)$$
$$\{y_0, y_1, y_2, \dots\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$
jolloin
$$\mathcal{Z}\{\tilde{y}\} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k z^{-k+1} = z \sum_{k=1}^{\infty} x_k z^{-k} = z(\mathcal{Z}\{x\} - x_0)$$
Vastaavasti siirrolle oikealle
$$\tilde{y} = \{\tilde{y}_k\} = \{0, x_0, x_1, x_2, \dots\}$$
$$\mathcal{Z}\{\tilde{y}\} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k-1} = z^{-1}\mathcal{Z}\{x\}$$
Tämä on tärkeä tulos ns. differenssiyhtälöitä ajatellen.

Sovellus: Differenssiyhtälö

Ratkaistaan jono y_k, kun

$$y_{k+1} = \alpha y_k + x_k, \quad y_0 = 1; \quad x_k = 2^{-2k}, \quad k \geq 0$$

Merkitsemme $\beta = 1/4$ ja Z–muunnamme yhtälön

$$z(Y(z) - y_0) = \alpha Y(z) + X(z), \qquad X(z) = \frac{z}{z-\beta}$$

joten jos $\alpha \neq \beta$,

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z}{(z-\beta)(z-\alpha)} + \frac{z}{z-\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha\frac{z}{z-\beta} - \beta\frac{z}{z-\alpha}\right] + \frac{z}{z-\alpha} \\ y(k) &= \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\beta^k + \left(-\frac{\beta}{\alpha-\beta} + 1\right)\alpha^k \end{aligned}$$

Jos $\alpha = \beta$,

$$Y(z) = z^{-1}\underbrace{\left(\frac{z}{z-\beta}\right)^2}_{\mathcal{Z}\{a\}} + \underbrace{\frac{z}{z-\beta}}_{\mathcal{Z}\{b\}}$$

joten $b_k = \beta^k$ ja, koska $\mathcal{Z}\{b * b\} = (\mathcal{Z}\{b\})^2$

$$a_k = (b * b)_k = \sum_{j=0}^{k} \beta^j \beta^{k-j} = (k+1)\beta^k$$

Saamme

$$y_k = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ a_{k-1} + b_k \ = \beta^{k-1}(k+\beta) & , k \geq 1 \end{cases}.$$

Differenssiyhtälö

- N. kertaluvun lineaarisen, vakiokertoimisen differenssiyhtälön perusmuoto on

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y(k-n) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(k-m), \qquad a_0 \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + \ldots a_N y_{k-N} = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \ldots b_N x_{k-M}$$

  jossa y ratkaistaan, kun x tunnetaan.
- Z–muunnosta voidaan käyttää differenssiyhtälöiden ratkaisemiseen samaan tapaan kuin Laplace-muunnosta käytetään differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen.
- Itseasiassa differentiaaliyhtälöiden numeerinen ratkaiseminen differentiaaliyhtälöitä approksimoidaan differenssiyhtälöllä, esimerkiksi jatkuvan ajan t sijasta tarkastellaan diskreetteja ajanhetkiä $t_0, t_1, t_2, \ldots$ ja vastaavasti ratkaisua $y(t)$ sijasta approksimaatiota $y_k \approx y(t_k)$.

Esimerkki: Fibonaccin luvut

Kuva: Leonardo Pisalainen (n. 1170-1250), joka tunnetaan paremmin nimellä Fibonacci (filius Bonacci, eli Bonaccion poika). Kuuluisa lukujono löytyy kanien lisääntymistä käsittelevästä tehtävästä kirjassa *Liber Abaci* (Laskujen Kirja). Kirja on myös Euroopassa ensimmäinen, jossa käytetään arabialaista (oikeimmin intialaista) lukujärjestelmää.

Esimerkki: Fibonaccin luvut, jatkoa

Fibonaccin lukujono määritellään kaavalla $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$.

Tämä kaava voidaan tulkita differenssiyhtälöksi, missä alkuarvot ovat $f(1) = f(0) = 1$.

Kysymys: Halutaan löytää suljettu muoto (eli kaava) funktiolle $f(k)$, joka parametrilla k antaa k:nnen Fibonaccin luvun.

Ratkaistaan ongelma Z–muunnoksen avulla.

Esimerkki: Fibonaccin luvut, jatkoa

Tehdään Z–muunnos differenssiyhtälöllä $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$:

$$z^2(F(z) - f(0) - z^{-1}f(1)) = z(F(z) - f(0)) + F(z).$$

Sijoitetaan alkuarvot $f(1) = f(0) = 1$ ja ratkaistaan yhtälö algebrallisesti

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}.$$

Etsitään nimittäjän nollakohdat; $w_\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Nyt nimittäjä voidaan jakaa tekijöihin:

$$z^2 - z - 1 = (z - w_+)(z - w_-).$$

Esimerkki: Fibonaccin luvut, jatkoa

Etsitään osamurrot

$$\frac{z}{(z - w_+)(z - w_-)} = \frac{c_+}{z - w_+} + \frac{c_-}{z - w_-}.$$

Saadaan $c_\pm = \pm w_\pm/\sqrt{5}$, koska $w_- - w_+ = \sqrt{5}$.

Voidaan kirjoittaa (huomaa z osoittajassa)

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{zw_+}{z - w_+} - \frac{zw_-}{z - w_-}\right).$$

Koska $\mathcal{Z}\{w_\pm^k\} = z/(z - w_\pm)$, saadaan

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{5}}(w_+^{k+1} - w_-^{k+1})$$

Esimerkki: Fibonaccin luvut, jatkoa

Koska $w_+ + w_- = 1$, voidaan kirjoittaa $w_+ = \varphi$, $w_- = (1 - \varphi)$, missä

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618033989$$

on kultaisen leikkauksen suhde.

Olemme johtaneet Jacques Binetin (1786-1856) tunnetun kaavan:

$$f(k-1) = \frac{\varphi^k - (1 - \varphi)^k}{\sqrt{5}}.$$

□

Vakiofunktio $x(k) = 1,\ k \geq 0$

Tarkastellaan funktiota $x(k) = 1$.

Lasketaan Z–muunnos. Saadaan

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}.$$

Kyseessä on geometrinen sarja. Saadaan

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}.$$

$\square$

Porrasfunktio $x(k) = k,\ k \geq 0$

Tarkastellaan funktiota $x(k) = k$.

Lasketaan Z–muunnos. Saadaan

$$X(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \ldots \tag{4.1}$$

Jaetaan z:lla, siis

$$z^{-1}X(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4} + \ldots \tag{4.2}$$

Lasketaan yhteen (4.1) ja (4.2). Saadaan

$$(1 - z^{-1})X(z) = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}.$$

Siis

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}.$$

$\square$

Funktio $x(k) = k^2,\ k \geq 0$

Tutkitaan funktiota $x(k) = k^2$.

Lasketaan Z–muunnos:

$$\mathcal{Z}\{k^2\} = z^{-1} + 4z^{-2} + 9z^{-3} + \ldots$$

Kerrotaan z^{-1}:llä:

$$z^{-1}\mathcal{Z}\{k^2\} = z^{-2} + 4z^{-3} + 9z^{-4} + \ldots$$

Vähennetään alempi yhtälö ylemmästä. Uudelleenjärjestämällä termejä saadaan:

$$\begin{aligned}(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\{k^2\} = -z^{-1} + 2[z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \ldots] \\ - [z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \ldots]\end{aligned}$$

Funktio $x(k) = k^2$, $k \geq 0$, jatkoa

Havaitaan, että keskimmäinen sulkeissa oleva jono on $\mathcal{Z}\{k\}$. Loput muodostavat geometrisen sarjan, joten saadaan

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{k^2\} &= \frac{2z^{-1}}{(1-z^{-1})^3} - \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \\ &= \frac{z^{-1}(2-1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3} \end{aligned}$$

$$= \frac{z^{-1}(z^{-1}+1)}{(1-z^{-1})^3}.$$

$\square$