

Matematiikan peruskurssi KP3 I

OSA 4: Taylorin sarja, residymenetelmä

A.Rasila J.v.Pfaler

26. syyskuuta 2007

1 Kompleksista sarjoista

- Jono, suppeneminen, summasarja
- Potenssisarja, suppenemissäde ja analyyttiset funktiot
- Taylorin sarja
- Taylorin lause
- Esimerkkejä sarjaesityksistä
- Laurentin lause

2 Analyttisen funktion singulariteetit

- Singulariteettien luokittelu
- Nollakohta, kertaluku

3 Residymenetelmä

- Residyjen laskeminen

Kertausta, suppeneva jono, summasarja

- Jonoa kompleksilukuja $z_1, z_2, \dots$ merkitään (z_n) .
- **Jono (z_n) suppenee** kohden lukua c , jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen N , että

$$|z_n - c| < \varepsilon, \text{ kun } n > N.$$

Merkitään $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c$ tai $z_n \rightarrow c$,

- Sanomme, että jono **hajaantuu** jos se ei suppene.
- Tutkitaan jonoa

$$s_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n.$$

- Jos jono (s_n) suppenee, eli $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, niin kirjoitetaan

$$s = \sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + z_3 + \dots,$$

ja kutsutaan lukua s **sarjan (z_n) summaksi**.

Esimerkkejä sarjoista

- Jono $1, 1, 1, 1, \dots$ eli (1) suppenee.
- Sarja (1) hajaantuu.
- Jono (i^k) hajaantuu: $s_{4k} = 1$, $s_{4k+1} = i$, $s_{4k+2} = -1$, $s_{4k+3} = -i$.
- Sarja (z^k) suppenee, $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, kun $|z| < 1$.

Potenssisarja, suppenemissäde

- **Potenssisarja** on sarja, joka on muotoa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Lukua z_0 sanotaan sarjan **kehityskeskukseksi** tai keskuksiksi.

- Potenssisarja suppenee kiekossa $D = \{z : |z - z_0| < r\}$ (uniformisti) jollakin $r \geq 0$. Suurinta lukua $R = \sup r$, jolla sarja suppenee, kutsutaan sarjan **suppenemissäteeksi**.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

- Sarja hajaantuu suljetun kiekon ulkopuolella $z \notin \bar{D}$ eli $|z - z_0| > R$.

Potenssisarja ja analyyttiset funktiot

Seuraus

Potenssisarjan summa $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ on **analyyttinen** funktio suppenemisalueessaan.

Potenssisarja ja derivointi

Termeittäin derivoidulla potenssisarjalla

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{d}{dz} (z - z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$$

on sama suppenemissäde kuin alkuperäisellä sarjalla koska

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k-1) a_{k-1}}{k a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{a_{k-1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k-1}}{a_k} = R$$

Termeittäin derivoidun sarjan summa on sarjan summan derivaatta (yhteisessä suppenemisalueessaan):

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \Rightarrow f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{d}{dz} (z - z_0)^k$$

Huomaa summausindeksin muutos sarjassa.

Potenssisarja ja integrointi

Potenssisarjaa $f(z)$ voidaan **integroida termeittäin**, kaikilla $z \in D$:

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

$\Rightarrow$

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_C (z - z_0)^k dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$$

mielivaltaiselle käyrälle $C \subset D$.

Potenssisarja ja analyyttiset funktiot ...

Derivoimalla potenssisarjaa $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ saadaan suppenemisalueessa

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{d^n}{dz^n} (z - z_0)^k \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (z - z_0)^{k-n} \\ &= n! a_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} a_{n+k} (z - z_0)^k \end{aligned}$$

joten kun $z = z_0$, erityisesti $a_0 = f(z_0)$ ja yleisesti

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Taylorin sarja

Funktion $f(z)$ kompleksinen **Taylorin sarja** kehityskeskuksessa z_0 on

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ missä } a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Cauchyn integraalilauseen nojalla toisaalta

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw,$$

missä f on analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa D ja integrointi suoritetaan vastapäivään pitkin yksinkertaista suljettua polkua $C \subset D$, joka sulkee sisäänsä pisteen z_0 .

Jos $z_0 = 0$, niin Taylorin sarjaa kutsutaan **Maclaurinin sarjaksi**.

Taylorin lause

Lause 1

Oletetaan, että $f(z)$ on analyyttinen alueessa D , $z_0 \in D$. Tällöin on olemassa **täsmälleen yksi Taylorin sarja, jonka keskipiste on z_0** , joka edustaa funktiota $f(z)$.

Sarja suppenee kaikissa z_0 -keskisessä kiekossa

$$B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\},$$

jossa f on analyyttinen.

Taylorin sarjan kertoimet toteuttavat epäyhtälön

$$r^n |a_n| \leq \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}.$$

Todistus. Sivutetaan



Esimerkki 1, geometrinen sarja

Tarkastellaan funktiota $f(z) = 1/(1 - z)$ kehityskeskuksena $z_0 = 0$.

Saadaan $f^{(n)}(z) = n!/(1 - z)^{n+1}$ ja $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = 1$.

Maclaurinin sarjaksi saadaan

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$$

Suppenemissäde $R = 1$. Toisaalta f :llä on singulariteetti pisteessä $z = 1$. Tämä piste on suppenemisäiteisen kiekon reunalla.

Esimerkki 1, geometrinen sarja ...

Tarkastellaan funktiota $f(z) = 1/(1-z)$ kehityskeskukseksi $z_0 = -1$.

Saadaan $f^{(n)}(z) = n!/(1-z)^{n+1}$ ja $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(-1) = 2^{-n-1}$,

Taylor sarjaksi pisteessä $z_0 = -1$ saadaan

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{z+1}{4} + \frac{(z+1)^2}{8} + \dots$$

Suppenemissäde $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-n}}{2^{-n-1}} = 2$. Toisaalta f :llä on singulariteetti pisteessä $z = 1$. Tämä piste on suppenemisäiteisen kiekon reunalla, $|z_0 - 1| = 2$.

Esimerkki 1, geometrinen sarja ...

Tarkastellaan funktiota $f(z) = 1/(1-z)$ kehityskeskukseksi $z_0 = -i$.

Saadaan $f^{(n)}(z) = n!/(1-z)^{n+1}$ ja $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(-i) = (1+i)^{-n-1}$.

Taylor sarjaksi pisteessä $z_0 = -i$ saadaan

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^{-n-1} (z+i)^n$$

Suppenemissäde $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(1+i)^{n+1}}{(1+i)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |1+i| = \sqrt{2}$. Toisaalta f :llä on singulariteetti pisteessä $z = 1$. Tämä piste on suppenemisäiteisen kiekon reunalla, $|z_0 - 1| = \sqrt{2}$.

Esimerkki 2, eksponenttifunktio

Tarkastellaan funktiota $f(z) = e^z$.

Funktio f on kokonainen (entire) eli analyyttinen koko kompleksitasossa, ja $f'(z) = e^z$.

Maclaurinin sarjaksi, $z_0 = 0$, saadaan

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

jonka suppenemissäde on

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

Laurentin lause

Lause 3

Oletetaan, että $f(z)$ on analyyttinen kahden samankeskisen ympyrän C_1, C_2 väliin jäävässä alueessa $D = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$.

Tällöin $f : D \mapsto \mathbb{C}$ voidaan esittää **Laurentin sarjana**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{Huomaa indeksointi!}$$

Sarjan kertoimet a_n saadaan kaavasta

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw,$$

missä integrointi suoritetaan vastapäivään pitkin polkua C , joka kiertää sisemmän ympyrän C_1 kerran vastapäivään alueessa D .

Todistus. Sivuutetaan.

Analyttisen funktion singulariteetit

- Oletetaan, että $f(z)$ ei ole analyttinen (mahdollisesti ei edes määritelty) pisteessä z_0 .
- Oletetaan lisäksi, että jokainen z_0 :n ympäristö sisältää pisteitä, joissa f on analyttinen. Tällöin sanomme pistettä z_0 $f(z)$:n **singulaariseksi pisteeksi**.
- Pistettä z_0 kutsutaan $f(z)$:n **isoloiduksi singulariteetiksi**, jos z_0 :lla on ympäristö, jossa ei ole muita pisteitä, joissa f olisi singulaarinen.
- Esimerkki: $\tan z$:lla on isoitu singulariteetti pisteissä $\pm\pi/2, \pm3\pi/2, \dots$, mutta $\tan(1/z)$:lla on ei-isoitu singulariteetti 0:ssa, sen singulariteetit ovat pisteissä $\frac{\pm 2}{k\pi} \rightarrow 0, k = 1, 3, 5, \dots$

Singulariteettien luokittelu

Idea: Laurentin sarjaa voidaan käyttää funktion $f(z)$ isoitujen singulariteettien luokitteluun pisteessä z_0 .

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}}_{\text{principal part}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}_{\text{analytical part}}.$$

Jos singulariteetti z_0 on isoitu, löytyy (riittävän pieni) R jolla sarjaesitys on voimassa alueessa $D = \{z : 0 < |z - z_0| < R\}$. Huomaa että $z_0 \notin D$. Sarjaesityksen ensimmäistä, negatiivisia potensseja sisältävää osaa kutsutaan sarjan olennaiseksi osaksi (principal part). Jälkimmäinen, vain ei negatiivisia eksponentteja sisältä osa on analyttinen funktio, erään funktion Taylor sarja.

Singulariteettien luokittelu, jatkoa

Jos olennaisessa osassa on vain äärellinen määrä termejä, ($a_{-n} = 0$, kun $n > m$) olennainen osa (principal part) voidaan kirjoittaa äärellisenä summana:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}}_{\text{principal part}} = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \dots + \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}, \quad (a_{-m} \neq 0).$$

$f(z)$:n singulariteettia z_0 kutsutaan f :n **navaksi** (pole) ja m :ää navan asteeksi. Kun $m = 1$ sanomme, että kyseessä on **yksinkertainen napa** (simple pole).

Jos olennaisessa osassa on ääretön määrä termejä, singulariteettia kutsutaan **olennaiseksi** (essential). Ei-isoituja singulariteetteja ei tarkastella tässä.

Lause

Olkoon f kompleksimuuttujan kompleksiarvoinen funktio. Seuraavat kolme kohtaa ovat ekvivalentit

- Funktiolla f on napa pisteessä z_0 astetta m .
- Funktiolla f on Laurent esitys pisteen z_0 ympäristössä:

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

jossa $a_{-m} \neq 0$ ja $0 < |z - z_0| < r$ jollakin säteellä $r > 0$.

- Funktio g ,

$$g(z) = \begin{cases} (z-z_0)^m f(z), & z \neq z_0 \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m f(z), & z = z_0 \end{cases}$$

on analyttinen pisteen z_0 avoimessa ympäristössä; $0 \leq |z - z_0| < r$ jollakin säteellä $r > 0$.

Huomaa erityisesti edellä että:

- a) Napa tarkoittaa että singulariteetti on myös isoitu.
- b) Jos esitys on olemassa, mutta $a_{-m} = 0$, singulariteetti z_0 on korkeintaan astetta m .
- c) Funktiolla g on Taylor-sarja

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m}(z - z_0)^k$$

koska $g(z) = (z - z_0)^m f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k (z - z_0)^m$

- c) Jos jo tiedämme, että z_0 on isoitu singulariteetti, riittää tarkastella raja-arvoa $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$. Jos se on määritelty, g on analyyttinen, ja piste on z_0 on singulariteetti korkeintaan astetta m , koska ...
- c) $g(z_0) = a_{-m}$.

Esimerkki 3

Funktiolla

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^5} + \frac{1}{(z-2)^2} = \frac{1 + z(z-2)^3}{z(z-2)^5}$$

on yksinkertainen napa pisteessä $z = 0$, koska

$$\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = -\frac{1}{32} \neq 0.$$

Vertailun vuoksi: $(\lim_{z \rightarrow 0} f(z))$ ei ole olemassa, ja $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$ ei ole olemassa.

Funktiolla on kertalukua 5 oleva napa pisteessä $z = 2$:

$$\lim_{z \rightarrow 2} (z - 2)^5 f(z) = \frac{1 + 2(2 - 2)^3}{2} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

Nollakohta, kertaluku

- Analyyttisen funktion **nollakohta** on piste z_0 , jossa $f(z_0) = 0$.
- Nollakohta on **kertalukua** m , jos kaikilla $k = 0, \dots, m-1$

$$f^{(k)}(z_0) = 0, \quad \text{ja} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

- Kertalukua 1 olevia nollakohtia kutsutaan myös yksinkertaisiksi.

Nollakohta, kertaluku ...

Analogisesti Laurent -sarjan ja napojen yhteyden kanssa,

Lause

Olkoon funktio f on analyyttinen z_0 ympäristössä. Ekvivalenttisesti

- Funktiolla on m -asteen nollakohta kohdassa z_0 .
- Funktiolla on Taylor-sarja muotoa

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_m \neq 0.$$

- Funktio

$$g : z \mapsto (z - z_0)^{-m} f(z)$$

on analyyttinen z_0 ympäristössä ja $g(z_0) \neq 0$.

Residymenetelmä, johdanto

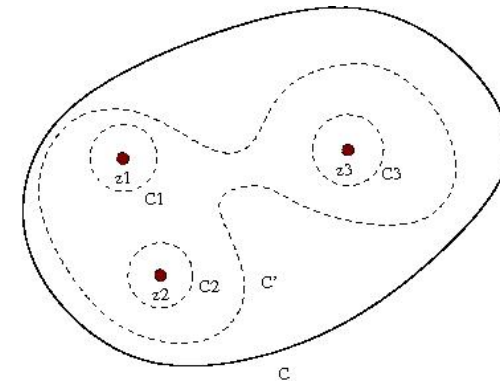
Cauchyn residymenetelmän etsimme tapaa laskea muotoa $\oint_C f(z) dz$, oleva kompleksinen käyräintegraali.

Oletetaan jatkossa, että C on suunnattu vastapäivää ja kiertää kunkin pisteen vain kerran. Tämä vain helpottaa merkintöjä.

Residymenetelmä, johdanto ...

Oletetaan, että f on analyyttinen C rajaamalla alueella, lukuunottamatta napoja $z_1, z_2, \dots, z_n$. Analyytisyyden nojalla voimme kirjoittaa, joillekin suljetuille käyrille C_j , kukin kiertäen vain singulariteetin z_j ,

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{j=1}^n \oint_{C_j} f(z) dz.$$



Residymenetelmä, johdanto ...

jatkuu...

- Tarkastellaan vain yhtä osakäyrää C_j . Olkoon z_i napa kertalukua m_i . Kehittämällä f Laurent-sarjaksi jossakin muotoa $D = \{z : 0 < |z - z_i| < R_i\}$ olevassa alueessa (joka sisältää C_j :n) saamme

$$\oint_{C_j} f(z) dz = \sum_{k=-m_i}^{\infty} a_k \oint_{C_j} (z - z_i)^k dz = 2\pi i a_{-1}$$

Merkitsemme $a_{-1} =: \text{Res}_{z=z_i} f(z)$.

- Kutsumme lukua $\text{Res}_{z=z_i} f(z)$ funktion f **residyksi**¹ pisteessä z_i .
- Saamme

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{j=1}^n \oint_{C_j} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{z=z_j} f(z)$$

Residyjen laskeminen

Lause

Jos f :llä on m -kertainen napa kohdassa z_0 niin

$$\text{Res}_{z=z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} g^{(m-1)}(z),$$

jossa

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z).$$

¹Residue (engl.fr); murto-osa, jäljelle jäävä osa (integraation jälkeen).

Residyjen laskeminen ...

Todistus seuraa suoraan Laurent-sarjasta. Olkoon f :llä Laurent sarja

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

tällöin g :llä on Taylor-sarja

$$\begin{aligned} g(z) &= (z-z_0)^m \sum_{k=-m}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m} (z-z_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(z_0)(z-z_0)^k. \end{aligned}$$

Selvästi $g^{(m-1)}(z_0) = a_{-1}$, sillä $k-m = -1$, jos $k = m-1$.

Residyjen laskeminen ...

Vaihtoehtoinen todistus suoraan Cauchyn integraalilauseella

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C \underbrace{\frac{1}{(z-z_0)^m}}_{\text{singular}} \underbrace{(z-z_0)^m f(z)}_{=:g(z) \text{ analytic}} dz \\ &= 2\pi i g^{(m-1)}(z_0) \end{aligned}$$