Supremum ja infimum

$\sup A$ eli reaalijoukon A supremum on maksimin yleistys jolla on se hyvä ominaisuus, että se on aina olemassa. Vastaavasti, $\inf A$ eli A:n infimum on mimimin yleistys.

Jos $A \subset \mathbb{R}$ niin $\sup A = a$, missä $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
mikäli $x \leq a$ kaikilla $x \in A$ ja
jos $\alpha < a$ niin löytyy $x \in A$ siten, että $x > \alpha$.
$\sup A$ eli A:n supremum on joukon A pienin yläraja.

Jos joukossa $A \subset \mathbb{R}$ on suurin arvo a, eli $\max A = a$ niin $\sup A = a$

Jos $A \subset \mathbb{R}$ niin $\inf A = b$, missä $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
mikäli $x \geq b$ kaikilla $x \in A$ ja
jos $\beta > b$ niin löytyy $x \in A$ siten, että $x < \beta$.
$\inf A$ eli A:n infimum on joukon A suurin alaraja.

Jos joukossa $A \subset \mathbb{R}$ on pienin arvo b, eli $\min A = b$ niin $\inf A = b$

Jos $\emptyset$ on tyhjä joukko niin
$\sup \emptyset = -\infty \quad$ ja $\inf \emptyset = +\infty$

Raja-arvot

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L:$$

Jos $|x - x_0|$ on "riittävän pieni" ja $x \neq x_0$ niin $|f(x) - L|$ on "pieni"

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} f(x) = L:$$

Kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

jos $0 < |x - x_0| < \delta$ ja $x \in \Omega$ niin $|f(x) - L| < \epsilon$

Jos $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} f(x) = F$ ja $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} g(x) = G$ niin

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) = \alpha F + \beta G,$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} f(x)g(x) = FG,$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}, \text{ mikäli } G \neq 0,$$

$F \leq G$ mikäli $f(x) \leq g(x)$ kun $0 < |x - x_0| < c$ missä $c > 0$.

Jos $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ ja $|f(x)| \leq g(x)$

kun $0 < |x - x_0| \leq c$ missä $c > 0$ niin

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Jos $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$ ja $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

kun $0 < |x - x_0| \leq c$ missä $c > 0$ niin

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Jonon (a_n) raja-arvo $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$:

Kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $N_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

jos $n > N_0$ niin $|a_n - L| < \epsilon$

Raja-arvo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ **ei** ole olemassa jos

löytyy kaksi jonoa (a_n) ja (b_n) siten, että

$a_n \neq x_0$ ja $b_n \neq x_0$ kaikilla n, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = x_0$ ja

$\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = A$ ja $\lim\limits_{n \to \infty} f(b_n) = B$ missä $A \neq B$

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in (x_0, \infty)}} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in (-\infty, x_0)}} f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = L$$

Jos $\lim_{x\to x_0} f(x) = F$, $\lim_{y\to F} g(y) = G$ ja

$g(F) = G$ tai $f(x) \neq F$ kun $x \neq x_0$, niin

$$\lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = \lim_{y\to F} g(y)$$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, $(L \in \mathbb{R})$:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{R} : x > p \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, $(L \in \mathbb{R})$:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{R} : x < n \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $(x_0 \in \mathbb{R})$:

$$\forall P \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > P$$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, $(x_0 \in \mathbb{R})$:

$$\forall N \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < N$$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$:

$$\forall N \in \mathbb{R}\ \exists p \in \mathbb{R} : x > p \Rightarrow f(x) < N$$

Jos $a > 0$ niin	$a \cdot \infty = \infty$
$\infty + \infty = \infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$
$(-a) \cdot \infty = -\infty$	$\dfrac{a}{\infty} = 0$

$0 \cdot \infty = ?$	$\infty - \infty = ?$
$\dfrac{0}{0} = ?$	$\dfrac{\infty}{\infty} = ?$
$\dfrac{a}{0} = ?(\pm\infty)$	

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to 0+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to 0+} f\left(-\frac{1}{x}\right) = L$$

Jos $f(x) > 0$ kun $x \in \Omega$ niin

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Jatkuvuus

Funktio $f : \Omega \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä x_0 jos

$$x_0 \in \Omega \text{ ja } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} f(x) = f(x_0)$$

Funktio $f : \Omega \to \mathbb{R}$ on jatkuva (Ω:ssa) jos

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} f(x) = f(x_0) \text{ kaikilla } x_0 \in \Omega$$

Jos $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ja $g : \Omega \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia, niin $\alpha f(x) + \beta g(x)$ ja $f(x)g(x)$ ovat jatkuvia Ω:ssa ja

$$\frac{f(x)}{g(x)} \text{ on jatkuva joukossa } \{\, x \in \Omega \mid g(x) \neq 0 \,\}$$

Jos $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia ja $g(x) \in \mathcal{D}_f$ kaikilla $x \in \mathcal{D}_g$, niin yhdistetty funktio $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ on jatkuva: $\mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$

Bolzanon merkinvaihtolause

Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja $f(a)f(b) \leq 0$ niin on olemassa piste $x_0 \in [a,b]$ siten, että $f(x_0) = 0$

Jos f on jatkuva välillä $[a_0, b_0]$ ja $f(a_0)f(b_0) < 0$ ja jos

$$\begin{cases} a_{j+1} = a_j, \\ b_{j+1} = \dfrac{a_j + b_j}{2}, \end{cases} \quad \text{jos} \quad f(a_j)f(\tfrac{a_j+b_j}{2}) < 0,$$

$$\begin{cases} a_{j+1} = \dfrac{a_j + b_j}{2}, \\ b_{j+1} = b_j, \end{cases} \quad \text{jos} \quad f(a_j)f(\tfrac{a_j+b_j}{2}) > 0,$$

$$\text{ja } a_{j+1} = b_{j+1} = \frac{a_j + b_j}{2} \text{ jos } f(\tfrac{a_j+b_j}{2}) = 0,$$

niin on olemassa piste $x_0 \in [a_j, b_j]$, $j \geq 1$ siten, että $f(x_0) = 0$

Jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetulla ja rajoitetulla välillä:

Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva niin on olemassa pisteet x_1 ja $x_2 \in [a,b]$ siten, että

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad x \in [a,b]$$

eli $f(x_1) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ ja $f(x_2) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$

Polynomi $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_0$,
missä $n \in \mathbb{N}$ on luonnollinen luku, on jatkuva joukossa $\mathbb{R}$

Rationaalifunktio $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ missä P ja Q ovat polynomeja
on jatkuva määrittelyjoukossaan $\{\, x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0 \,\}$

Derivaatta

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

f on derivoituva $\Leftrightarrow$ raja-arvo on olemassa ja on äärellinen.
Voidaan puhua funktion f derivaatasta pisteessä x ainoastaan jos f on määritelty joukossa, joka sisältää välin $(x-\delta, x+\delta)$ missä δ on jokin (pieni) positiivinen luku

$$\boxed{f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = Df(x) = D_x f(x)}$$

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$
$$h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Jos f on derivoituva pisteessä x niin f on jatkuva pisteessä x

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha - 1}}$$

Derivaatta on tangentin kulmakerroin

Derivaatta on muutosnopeus

$$f'_{+}(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$f'_{-}(x) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

f on derivoituva pisteessä $x \Leftrightarrow$
$f'_{+}(x)$ ja $f'_{-}(x)$ ovat olemassa ja $f'_{+}(x) = f'_{-}(x)$

f on *jatkuvasti derivoituva* jos f on derivoituva ja f' on jatkuva

$$(f')'(x) = f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x) = D^2 f(x)$$
$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) = D^n f(x)$$

Osittaisderivaatat ja implisiittinen derivointi

$$\boxed{\begin{aligned} f_x(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \\ f_y(x,y) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = D_x f = f_1 = D_1 f \ldots \\ f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{gathered}}$$

Implisiittinen derivointi:

Jos $F(x_0,y_0)=0,\quad F_y(x_0,y_0)\neq 0$ ja F sekä F_y ovat jatkuvia niin

$$F(x,y(x))=0 \quad (\text{kun } |x-x_0| \text{ on riittävän pieni }),$$

$$y(x_0)=y_0 \text{ ja } y'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$$

VÄLIARVOLAUSE JA DERIVAATAN SOVELLUTUKSIA

Optimoinnin peruslause:

Jos f on derivoituva pisteessä x_0 ja

$f(x) \leq f(x_0)$ kun $|x - x_0| < \delta$ missä $\delta > 0$ niin

$f'(x_0) = 0$

eli paikallisessa maksimipisteessä (tai minimipisteessä) derivaatta on 0.

Rollen lause:

Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, f on derivoituva välillä (a, b) ja $f(a) = f(b)$ niin on olemassa $c \in (a, b)$ siten, että $f'(c) = 0$

Väliarvolause:

Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja f on derivoituva välillä (a, b) niin on olemassa $c \in (a, b)$ siten, että $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Lineaarinen approksimaatio:

$f(x + h) \approx f(x) + f'(x)h$

$f : I \to \mathbb{R}$ on ei-vähenevä jos $f(x_1) \geq f(x_2)$ kun $x_1 > x_2$ ja $x_1, x_2 \in I$

$f : I \to \mathbb{R}$ on aidosti kasvava jos $f(x_1) > f(x_2)$ kun $x_1 > x_2$ ja $x_1, x_2 \in I$

$f : I \to \mathbb{R}$ on ei-kasvava jos $f(x_1) \leq f(x_2)$ kun $x_1 > x_2$ ja $x_1, x_2 \in I$

$f : I \to \mathbb{R}$ on aidosti vähenevä jos $f(x_1) < f(x_2)$ kun $x_1 > x_2$ ja $x_1, x_2 \in I$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ on ei-vähenevä

$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ on ei-kasvava

$f'(x) \geq 0$ eikä (identtisesti) 0 millään avoimella välillä $\Leftrightarrow f$ on aidosti kasvava

$f'(x) \leq 0$ eikä (identtisesti) 0 millään avoimella välillä $\Leftrightarrow f$ on aidosti vähenevä

Käänteis ja transkendenttifunktiot

Jos $f : I \to \mathbb{R}$ on aidosti kasvava (vähenevä) ja jatkuva, niin on olemassa aidosti kasvava (vähenevä) ja jatkuva funktio g s.e.

$$g(f(x)) = x, \quad x \in I, \qquad f(g(y)) = y, \quad y \in J,$$

missä $J = \{\, y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ jollakin } x \in I \,\}$ ja I sekä J ovat välejä

$$g(f(x)) = x \Rightarrow g'(f(x))f'(x) = 1 \Rightarrow g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$f(g(y)) = y \Rightarrow f'(g(y))g'(y) = 1 \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y, \quad \mathrm{e}^0 = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^m} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} x^m\mathrm{e}^{-x} = 0$$

$$\ln(\mathrm{e}^x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{e}^{\ln(x)} = x, \quad x > 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln(x) = 0, \quad \alpha > 0$$

$$a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$$

$$\arcsin(\sin(x)) = x, \quad x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$\sin(\arcsin(x)) = x, \quad x \in [-1, 1]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan(\tan(x)) = x, \quad x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

$$\tan(\arctan(x)) = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\arccos(\cos(x)) = x, \quad x \in [0, \pi] \\ \cos(\arccos(x)) = x, \quad x \in [-1, 1] \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \\ \cosh(x) &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \\ \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\end{aligned}}$$

Vakiokertoimiset differentiaaliyhtälöt

Jos on ratkaistava differentiaaliyhtälö

$$y'(t) + ay(t) = 0$$

niin kokeillaan sijoittamalla y:n paikalle $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$ jolloin saadaan

$$r\mathrm{e}^{rt} + a\mathrm{e}^{rt} = 0$$

Koska $\mathrm{e}^{rt} \neq 0$ niin supistamalla saadaan

$$r + a = 0$$

josta seuraa, että $r = -a$. Ratkaisuksi kelpaa siis e^{-at} ja yleisemmin

$$y(t) = c\mathrm{e}^{-at}$$

Jos on ratkaistava differentiaaliyhtälö

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

niin kokeillaan sijoittamalla y:n paikalle $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$

jolloin saadaan supistuksen jälkeen karakteristinen yhtälö

$$r^2 + ar + b = 0$$

Ratkaistaan tämä yhtälö ja olkoot ratkaisut r_1 ja r_2.

Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^{r_1 t} + c_2\mathrm{e}^{r_2 t} \quad \text{jos} \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R} r_1 \neq r_2,$$

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^{r_1 t} + c_2 t\mathrm{e}^{r_1 t} \quad \text{jos} \quad r_1 = r_2 \in \mathbb{R},$$

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t) \quad \text{jos} \quad r_1, r_2 = \alpha \pm \mathrm{i}\beta.$$

ÄÄRIARVOT

Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva niin on olemassa x_1 ja $x_2 \in [a,b]$ s.e.

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2), \quad x \in [a,b],$$

$$x_1, x_2 \in \{a\} \cup \{b\} \cup \{\, x \in (a,b) \mid f \text{ ei ole derivoituva pisteessä } x \,\}$$

$$\cup \{\, x \in (a,b) \mid f'(x) = 0 \,\}$$

Jos $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ on derivoituva, $x_0 \in (a,b)$,

$f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) > 0$ niin

on olemassa $\delta > 0$ siten että

$f(x) \ge f(x_0)$ kun $|x - x_0| < \delta$ ja $x \in (a,b)$.

Jos $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja on olemassa $x_0 \in (a,b)$ s.e.

$$f(x_0) \le \lim_{x \to a+} f(x), \quad f(x_0) \le \lim_{x \to b-} f(x)$$

niin on olemassa $x_1 \in (a,b)$ s.e.

$$f(x_1) \le f(x), \quad x \in (a,b),$$

$$x_1 \in \{\, x \in (a,b) \mid f \text{ ei ole derivoituva pisteessä } x \,\}$$

$$\cup \{\, x \in (a,b) \mid f'(x) = 0 \,\}$$

Konveksisuus

Jos $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ on kaksi kertaa derivoituva, niin f on **konveksi** jos jokin, ja silloin jokainen muukin, seuraavista ehdoista on voimassa

(1) $f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1), \quad t \in [0,1], \quad x_0, x_1 \in (a,b)$

eli funktion arvo keskiarvopisteessä $\leq$ funktion arvojen keskiarvo

(2) $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x, x_0 \in (a,b)$

eli funktion kuvaaja on tangentin yläpuolella

(3) $f'(x)$ on ei-vähenevä funktio välillä (a,b)

(4) $f''(x) \geq 0, \quad x \in (a,b)$

Jos $-f$ on konveksi, niin f on konkaavi

Newtonin menetelmä

Newtonin menetelmä: $f(x) = 0 \Rightarrow x = ?$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Suppenee nopeasti jos $|f''(x)| \leq C$ ja $|f'(x)| \geq c > 0$

Kiintopisteiteraatio: $x = g(x) \Rightarrow x = ?$

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Suppenee ainakin jos $|g'(t)| \leq K < 1$

Yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisu löydettävä tarkkuudella δ:

Lasketaan $x_0, x_1, x_2, \ldots$ (jollain tavalla) ja lopetetaan kun

$$f(x_n - \delta) f(x_n + \delta) < 0$$

tai kun joko $f(x_n - \delta) f(x_n) < 0$ tai $f(x_n) f(x_n + \delta) < 0$

Taylorin polynomit

$f(x) = O(g(x)) \Rightarrow$ on olemassa vakio C s.e. $|f(x)| \leq C|g(x)|$

kun $x \in (a,b)$ tai $|x - x_0|$ on "riittävän pieni"

$$f(x) = O(f(x))$$
$$f(x)O(g(x)) = O(f(x)g(x))$$
$$\frac{O(g(x))}{f(x)} = O\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)$$
$$f(x) = O(g(x)) \Rightarrow O(f(x)) + O(g(x)) = O(g(x))$$
$$f(x) = O(g(x)) \Rightarrow O(f(x) + g(x)) = O(g(x))$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(k+1)}(t)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1},$$

$(t-a)(x-t) > 0$ eli t on a:n ja x:n välillä

Tässä siis lauseke $f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

on funktion f astetta k oleva Taylorin polynomi pisteessä $x = a$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + O(x^{k+1})$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + O(x^{k+1})$$

Taylorin kehitelmän yksikäsitteisyys:

Jos f on $k+1$ kertaa derivoituva ja

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_k(x-a)^k + O\Big((x-a)^{k+1}\Big)$$

niin $\quad c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \quad \ldots \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$

Raja-arvojen laskeminen

l'Hopitalin sääntö I

Jos f ja g ovat derivoituvia, $f(a) = g(a) = 0$, $g'(x) \neq 0$ kun $x \neq a$ ja

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$L \in [-\infty, \infty]$ ja a:n paikalla voi olla $b+$, $b-$, $-\infty$ tai $+\infty$

l'Hopitalin sääntö II

Jos f ja g ovat derivoituvia, $\lim_{x \to a} |g(x)| = \infty$, $g'(x) \neq 0$ kun $x \neq a$ ja

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$L \in [-\infty, \infty]$ ja a:n paikalla voi olla $b+$, $b-$, $-\infty$ tai $+\infty$

Integraalit

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)}$$

Integraalin $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ määritelmä:

Oletetaan: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu $(\sup\{\, |f(x)| \mid x \in [a,b]\,\} < \infty)$ ja $-\infty < a < b < \infty$

$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ on välin $[a,b]$ jako jos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

Alasumma: $\displaystyle L(f,P) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j - x_{j-1})$ missä $f_j = \inf\{\, f(x) \mid x_{j-1} \le x \le x_j \,\}$

Yläsumma: $\displaystyle U(f,P) = \sum_{j=1}^{n} F_j(x_j - x_{j-1})$ missä $F_j = \sup\{\, f(x) \mid x_{j-1} \le x \le x_j \,\}$

Nyt f on integroituva välillä $[a,b]$ ja $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I$ jos

$\sup\{\, L(f,P) \mid P$ on välin $[a,b]$ jako $\} = \inf\{\, U(f,P) \mid P$ on välin $[a,b]$ jako $\} = I$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on integroituva välillä $[a,b]$ ainakin jos f on paloittain jatkuva (erikoisesti jatkuva) tai f on ei-vähenevä (tai ei-kasvava) välillä $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$f(x) \le g(x), \quad x \in [a,b],\ (a < b) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x, \quad a < b$$

$$\boxed{\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)}$$

$$\boxed{\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = \Big/_{\!a}^{\,b} f(x) = f(b) - f(a)}$$