Kompleksiluvut

$$\boxed{z = x + \mathrm{i}y = x + y\mathrm{i}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{i}^2 = -1}$$

$$\boxed{\mathrm{Re}\,(x + \mathrm{i}y) = x} \qquad \boxed{\mathrm{Im}\,(x + \mathrm{i}y) = y}$$

Liittoluku eli konjugaatti

$$\overline{z} = x - \mathrm{i}y, \quad z = x + \mathrm{i}y$$

$$|z|^2 = z\overline{z}, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Moduuli eli itseisarvo

$$\mathrm{mod}\ (z) = |z| \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = x + \mathrm{i}y$$

Kolmioepäyhtälö

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Argumentti eli vaihekulma, $\arg(z) = \theta$

Jos $\mathrm{Re}\,(z) = x$ ja $\mathrm{Im}\,(z) = y$ niin z:n argumentti on

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \quad (+2n\pi), & x > 0, \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi \quad (+2n\pi), & x < 0, \\ \dfrac{y}{|y|}\dfrac{\pi}{2} \quad (+2n\pi), & x = 0 \end{cases}$$

Polaarimuoto

$$z = |z|(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow \theta = \arg(z)$$

eli jos $|z| = r$ ja $\arg(z) = \theta$ niin

$$\mathrm{Re}\,(z) = r\cos(\theta) \quad \text{ja} \quad \mathrm{Im}\,(z) = r\sin(\theta)$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$|z^n| = |z|^n, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\,(z^n) = n\arg(z), \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(z_1) = \mathrm{Re}\,(z_2), \quad \mathrm{Im}\,(z_1) = \mathrm{Im}\,(z_2)$$

$$\Leftrightarrow |z_1| = |z_2|, \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$$

missä $\theta_1 = \arg(z_1)$ ja $\theta_2 = \arg(z_2)$

$$z^n = w = |w|e^{i\varphi} \quad \text{(eli } \varphi = \arg(w)) \Rightarrow z = ?$$
$$|z| = r, \quad \arg(z) = \theta \Rightarrow |z^n| = r^n, \quad \arg(z^n) = n\theta$$
$$r^n = |w|, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi$$
$$\Rightarrow$$
$$|z| = r = \sqrt[n]{|w|}, \quad \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$
$$\Rightarrow$$
$$z = w^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{w}$$
$$= \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Eksponenttifunktio

$$\exp(x + iy) = e^{x+iy} \overset{\text{def}}{=} e^x\big(\cos(y) + i\sin(y)\big)$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \arg(e^z) = \operatorname{Im} z$$

Logaritmifunktio

$$z = \ln(w) \Leftrightarrow w = e^z$$
$$\Leftrightarrow z = \ln(|w|) + i(\arg(w) + 2n\pi), \quad n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

koska jos $z = x + iy$ niin $|e^z| = e^x$ ja $\arg(e^z) = y$

jolloin $e^x = |w|$, eli $x = \ln(|w|)$ ja $y = \arg(w) + 2n\pi$.

Matriisilasku

$m \times n$-matriisi

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix} = (A(j,k)) = (a_{jk})$$

Transpoosi, A^{T}

$$B = A^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow B_{j,k} = A_{k,j}$$

Summa: $A + B = C$, A, B ja C $m \times n$-matriisieja

$$C_{j,k} = A_{j,k} + B_{j,k}$$

Skalaarilla kertominen: $\lambda A = C$

$$C_{j,k} = \lambda A_{j,k}$$

Hermitointi: $\overline{A}^{\mathrm{T}} = C$

$$C_{j,k} = \overline{A_{k,j}}$$

eli transpoosi ja kompleksikonjugointi

Tulo: $C = AB$, A on $m \times n$-, B on $n \times p$- ja C on $m \times p$-matriisi

$$C_{j,k} = \sum_{q=1}^{n} A_{j,q} B_{q,k}$$

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$$

$A(BC) = (AB)C$ jos A om $m \times n$, B on $n \times p$ ja C on $p \times q$

Yleensä $AB \neq BA$

$0_{m \times n}$ tai 0 on $m \times n$-matriisi, jonka kaikki alkiot ovat 0

$I_{m \times m}$ tai I on $m \times m$-matriisi jolle pätee

$$I_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{jos } j = k, \\ 0, & \text{jos } j \neq k. \end{cases}$$

$$AI = IA = A$$

$m \times n$ matriisi A on neliömatriisi jos $m = n$

$$\boxed{\begin{array}{l} m \times 1 \text{ matriisi, missä } m > 1, \text{ on pystyvektori} \\ 1 \times m \text{ matriisi, missä } m > 1, \text{ on vaakavektori} \end{array}}$$

$$\boxed{m \times m \text{ matriisi A on} \quad \begin{cases} \text{lävistäjämatriisi jos } A_{j,k} = 0 \text{ kun } j \neq k \\ \text{symmetrinen jos } A^{\mathrm{T}} = A \\ \text{ortogonaalinen jos } A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}} = I \\ \text{kääntyvä eli säännöllinen jos sillä on} \\ \quad \text{käänteismatriisi } A^{-1} \text{ s.e. } AA^{-1} = A^{-1}A = I \end{cases}}$$

$$\boxed{m \times m \text{ matriisi A on} \quad \begin{cases} \text{yläkolmiomatriisi jos } A_{j,k} = 0 \text{ kun } j > k \\ \text{alakolmiomatriisi jos } A_{j,k} = 0 \text{ kun } j < k \\ \text{vinosymmetrinen jos } A^{\mathrm{T}} = -A \\ \text{hermiittinen jos } \overline{A}^{\mathrm{T}} = A \\ \text{vinohermiittinen jos } \overline{A}^{\mathrm{T}} = -A \\ \text{unitaarinen jos } \overline{A}^{\mathrm{T}}A = A\overline{A}^{\mathrm{T}} = I \end{cases}}$$

Matriisi on siis "suorakulman muotoinen" lukukaavio. Matriisin A alkioihin tai elementteihin voidaan viitata monella eri tavalla, esim. $A_{i,j}$, A_{ij} (jolloin ei ole selvää onko A_{123} alkio $A_{1,23}$ vai $A_{12,3}$), $A(i,j)$, $A[i,j]$, a_{ij} jne. Oleellisinta on kuitenkin, että ensimmäinen indeksi viittaa vaakariviin ja toinen pystysarakkeeseen.

Gaussin algoritmi

Sallitut rivioperaatiot

(i) Lisätään rivi kerrottuna vakiolla toiseen riviin

(ii) Vaihdetaan kaksi riviä

(iii) Kerrotaan rivi nollasta poikkeavalla vakiolla

Tavoiteena porrasmuoto

$m \times n$ matriisi A on porrasmuotoinen mikäli ehdosta

$$A_{j,k} \neq 0 \text{ ja } A_{j,q} = 0 \text{ kun } 1 \leq q < k$$

seuraa, että

$$A_{p,q} = 0 \text{ kun } j < p \leq m \text{ ja } 1 \leq q \leq k$$

Porrasmuotoisen $m \times n$-matriisin (j,k)-alkio on **tukialkio**, jos

$$A_{j,k} \neq 0 \text{ ja } A_{j,q} = 0 \text{ kun } 1 \leq q < k$$

Matriisi B on A:n porrasmuoto jos B on saatu A:sta soveltamalla Gaussin algoritmin rivioperaatioita

Porrasmuotoisen yhtälösysteemin ratkaiseminen:

Jos sarakkeella k ei ole tukialkiota, niin tuntematon x_k voidaan valita vapaasti.

Jos elementti (j,k) on tukialkio, ja tuntematttomat $x_{k+1}, \dots, x_n$ on laskettu, niin tuntematon x_k voidaan ratkaista yhtälöstä j.

Jos yhtälösysteemissä on yhtälö joka on muotoa

$$0x_1 + 0x_2 + \dots 0x_n = a \text{ missä } a \neq 0$$

niin yhtälösysteemillä ei ole ratkaisuja.

Osittaistuenta:

Vaihdetaan rivejä siten, että tukialkio on itseisarvoltaan mahdollisimman iso

Rangi:

Matriisin rangi on sen porrasmuodossa olevien tukialkioiden lukumäärä

Käänteismatriisi

Käänteismatriisi

Matriisilla A on käänteismatriisi A^{-1} jos

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

A:lla käänteismatriisi $\Leftrightarrow$ A on säännöllinen $\Leftrightarrow$ A on kääntyvä

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

Käänteismatriisi Gaussin algoritmilla

$$\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \sim \ldots \text{rivioperaatioilla} \ldots \sim \begin{pmatrix} I & A^{-1} \end{pmatrix}$$

$n \times n$-matriisi A on säännöllinen eli kääntyvä $\Leftrightarrow$

A:n rangi on n $\Leftrightarrow$

yhtälön $AX = 0$ ainoa ratkaisu on 0 $\Leftrightarrow$

$\det(A) \neq 0$ $\Leftrightarrow$

A:n vaakarivivektorit ovat lineaarisesti riippumattomia $\Leftrightarrow$

A:n pystysarakevektorit ovat lineaarisesti riippumattomia

Determinantit

$$\boxed{\begin{gathered}\det((a)) = a \\ \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \\ \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} = A_{1,1} \begin{vmatrix} A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} - A_{1,2} \begin{vmatrix} A_{2,1} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,3} \end{vmatrix} + A_{1,3} \begin{vmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{vmatrix}\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} A_{j,k} \det(\underset{j,k}{\not A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} A_{j,k} \det(\underset{j,k}{\not A}) \\ \text{missä } \underset{j,k}{\not A} \text{ on matriisi } A \text{ josta on poistettu vaakarivi } j \text{ ja pystysarake } k\end{gathered}}$$

Ensimmäinen yhtälö on määritelmä kun $j = 1$,

kaavojen muut tapaukset on todistettava

$$\boxed{\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A)}$$

$$\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B)}$$

$$\boxed{n \times n\text{-matriisi } A \text{ on säännöllinen } \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A\text{:n rangi on } = n.}$$

$$\boxed{\text{Ylä- tai alakolmiomatriisin determinantti on lävistäjäalkioiden tulo}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\textbf{Determinantti Gaussin algoritmilla:} \\ A \rightsquigarrow B \ \ \text{(Vaihdetaan kaksi riviä)} \Rightarrow \det(B) = -\det(A) \\ A \rightsquigarrow B \ \ \text{(Lisätään rivi kerrottuna vakiolla toiseen riviin)} \Rightarrow \det(B) = \det(A) \\ A \rightsquigarrow B \ \ \text{(Kerrotaan rivi nollasta poikkeavalla vakiolla } c\text{)} \Rightarrow \det(B) = c\det(A) \\ A_{j,k} = 0 \quad j > k \Rightarrow \det(A) = A_{1,1} \cdot A_{2,2} \cdot \ldots A_{n,n}\end{gathered}}$$

2×2 ja 3×3 matriisien determinatit tulevat usein laskettaviksi, $m \times m$ matriisien determinantit, missä $m >> 3$ tarvitaan harvemmin (ainakin numeerisesti laskettuina) ja koko determinantin käsite on valitettavan hankala ja ei-intuitiivinen!

Cramerin sääntö

$$\begin{array}{ccccccc} A_{1,1}x_1 & +A_{1,2}x_2 & \dots & +A_{1,m}x_m & = & b_1 \\ A_{2,1}x_1 & +A_{2,2}x_2 & \dots & +A_{2,m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ A_{m,1}x_1 & +A_{m,2}x_2 & \dots & +A_{m,m}x_m & = & b_m \end{array}$$

$$\Rightarrow$$

$$x_j = \frac{\det(C_j)}{\det(A)}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

missä C_j on "matriisi A, jossa j:s pystysarake on korvattu pystyvektorilla $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$"

Lineaarinen riippumattomuus ja kannat

Vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ ovat **lineaarisesti riippumattomia** jos

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$$

eli $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$ **ainoastaan** kun $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$

Vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ ovat **lineaarisesti riippuvia** jos
ne eivät ole lineaarisesti riippumattomia, eli
ainakin yksi vektoreista voidaan kirjoittaa toisten lineaarikombinaationa, eli

$$\mathbf{v}_j = \beta_1\mathbf{v}_1 + \ldots \beta_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + \beta_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \ldots + \beta_m\mathbf{v}_m$$

Vektoreiden $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ virittämä vektoriavaruus on

$$\{\, \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{w}_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \,\}$$

Vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ muodostavat vektoriavaruuden W kannan
eli ne ovat kantavektoreita, jos
ne ovat lineaarisesti riippumattomia (W:n vektoreita) ja
jokainen W:n vektori $\mathbf{w}$ voidaan esittää (yksikäsitteisesti) muodosssa

$$\mathbf{w} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \beta_m\mathbf{v}_m.$$

Vektoriavaruuden W dimensio on silloin m.

Jos B on matriisin A porrasmuoto, eli
B on saatu A:sta soveltamalla Gaussin algoritmin rivioperaatioita
niin

B:n nollasta poikkeavat vaakarivivektorit muodostavat
A:n vaakarivivektoreiden virittämän vektoriavaruuden kannan

ja

jos B:n tukialkiot ovat pystysarakkeilla $k_1, k_2, \ldots k_m$ niin
A:n pystysarakkeet $A_{:,k_1}, A_{:,k_2}, \ldots A_{:,k_m}$ muodostavat
A:n pystysarakevektoreiden virittämän vektoriavaruuden kannan

Ominaisarvot

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Jos } AX = \lambda X, \quad X \neq \mathbf{0} \\ \text{niin } \lambda \text{ on } A\text{:n ominaisarvo ja } X \text{ on vastaava ominaisvektori}\end{array}}$$

$\det(A - \lambda I)$ on A:n karakteristinen polynomi

$$\boxed{\lambda \text{ on } A\text{:n ominaisarvo} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Jos matriisilla } A \text{ on ominaisarvoinaan } \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m \text{ ja } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ kun } i \neq j \\ \text{niin vastaavat ominaisvektorit } X_1, X_2, \ldots X_m \text{ ovat lineaarisesti riippumattomia}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Symmetrisen (ja reaalisen) matriisin ominaisarvot ovat reaalisia} \\ \text{ja (eri ominaisarvoihin liittyvät) ominaisvektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan}\end{array}}$$

Jos A on $n \times n$ matriisi, jolla on ominaisarvot

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

ja ominaisvektorit

$X_1, X_2, \ldots, X_n$

ja jos matriisi V, jolle pätee $V_{:,j} = X_j$, on kääntyvä

eli, ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, niin

$$\boxed{V^{-1}AV = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{A = V \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} V^{-1}}$$

$$\boxed{A^k = V \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^k \end{pmatrix} V^{-1}}$$

Matriisin normi

Jos X on pystyvektori, niin sen pituus on

$$\|X\| = \sqrt{X^{\mathrm{T}}X}$$

tai $\sqrt{\overline{X}^{\mathrm{T}}X}$

Jos A on $m \times n$ matriisi, niin sen **normi** $\|A\|$ määritellään kaavalla

$$\|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\|$$

$$\|AX\| \leq \|A\|\|X\|$$
$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$
$$\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$$
$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$\|A\|$ on matriisin $A^{\mathrm{T}}A$ (tai AA^{T}) suurimman ominaisarvon neliöjuuri

(tai matriisin $\overline{A}^{\mathrm{T}}A$ tai $A\overline{A}^{\mathrm{T}}$ suurimman ominaisarvon neliöjuuri jos A on kompleksinen)