



Mat-1.411 Matematiikan peruskurssi C1
Hakula/Pursiainen
Harjoitustehtävät

4

Laskuharjoitukset pidetään torstaisin klo 12-14 joko luokassa U344 tai tietokonehuokassa Y344-5 (ujo). Paikka on tarkoitus ilmoittaa kutakin harjoituskertaa edeltävällä luennolla. Kotitehtävät palautetaan joko harjoituksissa tai huoneen U313 ilmoitustaulun postilokeroon.

1 Kotitehtävät

Viikolla 4 ei ole kotitehtäviä.

2 Laskuharjoitukset

Tehtävä 1: Peanon ytimet: Olkoon interpolaatiopolynomi $p \in P_2$ eli $n = 2$ ja data pisteissä $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$. Muodosta virhetermit, kun $f \in C^m[-1, 1]$, $m = 0, 1, 2, 3$. Piirrä esimerkkejä ytimistä $K_m(x, t)$.

Tehtävä 2: Splinit: Osoita, että luonnollisten splinien konstruktiossa muodostuva kerroinmatriisi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \\ & \mu_2 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix}$$

on säännöllinen.

3 Ohjelmistot ja implementaatio

Kurssilla käytettävä ohjelmisto on MATLAB. Interaktiivinen opastus löytyy komennolla `help`. Kokeile vaikka komentoa `help linspace`

Interpolaatio on toteutettu monella eri tavalla. Peruskomento on `interp1`. Meille sopii ehkä mukavammin perinteinen `polyfit/polyval`-pari. Sovitus tapahtuu kanoniseen kantaan Vandermonden systeemillä. Esimerkiksi:

```
n = 5;
x = linspace(-5, 5, n);
y = 1 ./ (1 + x.^2);
a = polyfit(x, y, n-1);
xvals = linspace(-5, 5);
pvals = polyval(a, xvals);
plot(x, y, 'o', xvals, pvals, xvals, 1 ./ (1 + xvals.^2), 'b-')
```

Algoritmi 1: Selvitä edellisen listauksen vaiheet. Kokeile kasvattaa interpolaatiopisteiden lukumäärää ja siis samalla polynomin astelukua ($p = n - 1$). Rungen ilmiön pitäisi ilmetä nopeasti. Mitä huomaat?

Splinit lasketaan komennolla `spline`. Valitettavasti komento tuottaa ns. “not-a-knot”-splinit, missä päätepisteiden arvot saadaan asettamalla kolmannen derivaatan jatkuvuus solmuissa x_2 ja x_{n-1} . Tämä kuutiosplinivariantti tarjoaa mukavan rajapinnan, koska lisäehtoja ei tarvitse määrätä. Esimerkiksi:

```
n = 9;
z = linspace(-5, 5);
x = linspace(-5, 5, n);
y = atan(x);
a = polyfit(x, y, n-1);
Svals = spline(x, y, z);
plot(z, Svals)
```

Algoritmi 2: Muodosta spliniapproksimaatioita edellisen tehtävän funktiolle

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5].$$

1.

VIRHETERMI:

$$R_n(t, x) = \frac{1}{m!} \sum_{r=0}^m l_{nr}(x) \int_{x_r}^x (x_r - t)^m f^{(m+1)}(t) dt$$

KUN $0 \leq m \leq n$. $f \in C^3[-1, +1]$ ELI $m=2$:

$$R_2(t; x) = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^2 l_{2r}(x) \int_{x_r}^x (x_r - t)^2 f'''(t) dt$$

MISSÄ $l_{20}(x) = \frac{1}{2} x(x-1)$, $l_{21}(x) = 1 - x^2$,

$$l_{22}(x) = \frac{1}{2} x(x+1)$$

KIRJOITETAAN SUMMA AVKI!

$$\begin{aligned} 2R_2(t, x) &= l_{20}(x) \int_{-1}^x (-1-t)^2 f'''(t) dt \\ &\quad + l_{21}(x) \int_0^x t^2 f'''(t) dt \\ &\quad + l_{22}(x) \int_1^x (1-t)^2 f'''(t) dt \end{aligned}$$

LAGRANGEN
POLYNOMI:

$$l_{mk}(x) = \prod_{v=0, v \neq k}^m \frac{x - x_v}{x_k - x_v}$$

1. JATKUU...JOS $x \leq 0$

$$\begin{aligned}
2R_2(f, x) = & l_{20}(x) \int_{-1}^x (1+t)^2 f'''(t) dt \\
& - l_{21}(x) \int_x^0 t^2 f'''(t) dt \\
& - l_{22}(x) \int_0^1 (1-t)^2 f'''(t) dt \\
& - l_{22}(x) \int_0^1 (1-t)^2 f'''(t) dt
\end{aligned}$$

SAADAAN

$$R_2(f, x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 K_2(x, t) f'''(t) dt$$

MISSÄ YDIN ON

$$K_2(x, t) = \begin{cases} l_{20}(x)(1+t)^2, & -1 \leq t \leq x \\ -l_{21}(x)t^2 - l_{22}(x)(1-t)^2, & x \leq t \leq 0 \\ -l_{22}(x)(1-t)^2, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

KUN $x \geq 0$ YDIN ON

$$K_2(x, t) = \begin{cases} l_{20}(x)(1+t)^2, & -1 \leq t \leq x \\ l_{20}(x)(1+t)^2 + l_{21}(x)t^2, & 0 \leq t \leq x \\ -l_{22}(x)(1-t)^2, & x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

1
JATKUU...

TAPAU S $m = 1$!

$$\begin{aligned} R_2(t, x) &= \sum_{r=0}^2 l_{2r}(x) \int_{x_r}^x (x_r - t) t''(t) dt \\ &= -l_{20}(x) \int_{-1}^x (1+t) t''(t) dt \\ &\quad - l_{21}(x) \int_0^x t t''(t) dt \\ &\quad + l_{22}(x) \int_0^x (1-t) t''(t) dt \end{aligned}$$

MISTÄ PEANON YDIN!

$$K_1(x, t) = \begin{cases} -l_{20}(x)(1+t) & -1 \leq t \leq x \\ l_{21}(x)t - l_{22}(x)(1-t) & x \leq t \leq 0 \\ -l_{22}(x)(1-t) & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

KAIKILLA $x \leq 0$ JA

$$K_1(x, t) = \begin{cases} -l_{20}(x)(1+t) & -1 \leq t \leq 0 \\ -l_{20}(x)(1+t) - l_{21}(x)t & 0 \leq t \leq x \\ -l_{22}(x)(1-t) & x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

KAIKILLA $x > 0$

1. JATKO...

TAPAU S $m = 0$

$$\begin{aligned}
 R_2(x, x) &= \sum_{r=0}^2 l_{2r}(x) \int_{x_r}^x f'(t) dt \\
 &= l_{20}(x) \int_{-1}^x f'(t) dt \\
 &\quad + l_{21}(x) \int_0^x f'(t) dt \\
 &\quad + l_{22}(x) \int_1^x f'(t) dt
 \end{aligned}$$

MISTÄ YDIN

$$K_0(x, t) = \begin{cases} l_{20}(x) & -1 \leq t \leq x \\ -l_{21}(x) - l_{22}(x) & x < t \leq 0 \\ -l_{22}(x) & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

KAIKILLA $x \leq 0$ $\searrow$

$$K_0(x, t) = \begin{cases} l_{20}(x) & -1 < t \leq 0 \\ l_{20}(x) + l_{21}(x) & 0 < t \leq x \\ -l_{22}(x) & x < t \leq 1 \end{cases}$$

KAIKILLA $x \neq 0$

2.

VAITE:

MATRIISICCA ON SEURAAVA OMI-
NAISUUS:

$$AZ = w \Rightarrow \max_i |z_i| \leq \max_i |w_i|$$

$$\text{KAIKILLA } z, w \in \mathbb{R}^{n+1}$$

TOD. OUKOON $AZ = w$ ELI

$$\mu_n z_{n-1} + 2z_n + d_n z_{n+1} = w_n$$

$$(\mu_n = 0 \text{ ja } d_n = 0)$$

TÄLLÖIN:

$$\max_i |w_i| \geq |w_n| \geq 2|z_n|$$

$$- \mu_n |z_{n-1}| - d_n |z_{n+1}|$$

$$\geq 2|z_n| - \mu_n |z_n| - d_n |z_n|$$

$$= (2 - \mu_n - d_n) |z_n| = |z_n|$$

$$= \max_i |z_i| \quad (\text{VOIDAAN VALITA } |z_n| = \max_i |z_i|)$$

NYT EHDOSTA $AZ = 0$

$$\text{SEURAA } \max_i |z_i| \leq 0 \Rightarrow z = 0$$

ELI MATRIISI ON SÄÄNNÖCCINEN! $\triangleright$