-e

mplVektorianalyysi

1. mplV000.tex

Ohjeita

Kerätään ohjeita näiden tehtävien aihepiiriin liittyen. "Tehtävä"-linkistä saat LaTeX-koodin, josta sopivan osan voit haluamallasi tavalla muokaten liittää tehtäväpaperiisi.

Taylorin polynomit

Kahden muuttujan Taylorin polynomi kehitettynä pisteesä p voidaan kirjoittaa:

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(h_1 D_1 + h_2 D_2)^k f(p)$$

Tästä on helppo arvata, miten useamman muuttujan polynomi rakentuu.

Erityisesti 2. asteen Taylorin kaava voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(p+h) = f(p) + h^T \nabla f(p) + \frac{1}{2} h^T H_f(p) h + R_2(h),$$

joka pätee n:n muuttujan funktiolle sellaisenaan. Tässä jäännöstermi $R_2(h) = ||h||^3 O(h)$. (Eli riittävän pienessä p:n ystössä pätee: $R_2(h) \leq M||h||^3$ jollain vakiolla M.)

Neliömuotojen definiittisyys

Määr: Neliömuoto $q(x) = x^T Ax$ (A on symmetrinen matriisi) on

1. positiivisesti definiitti, jos $q(x) > 0 \ \forall x \neq 0$,
2. negatiivisesti definiitti, jos $q(x) < 0 \ \forall x \neq 0$,
3. positiivisesti semidefiniitti, jos $q(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ ja $\exists y \neq 0$, jolla $q(y) = 0$,
4. negatiivisesti semidefiniitti, jos $q(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ ja $\exists y \neq 0$, jolla $q(y) = 0$,
5. indefiniitti, jos $\exists x, y$ siten, että $q(x) > 0$ ja $q(y) < 0$.

Samoja definiittisyyskäsitteitä käytetään myös *symmetrisestä matriisista* A.

Suunnattu derivaatta ja gradientti

- Suunnattu derivaatta pisteesä p_0 vektorin $\mathbf{v}$ suunassa saadaan lasketuksi pisteessä p_0 lasketun gradientin ja suuntayksikkövektorin sisätulona.
- Siispä funktio kasvaa nopeimmin gradientin suuntaan ja sen kasvu on 0 gradienttia vastaan kohtisuoraan suuntaan.
- Suunta, johon funktion kasvu on 0 on tasa-arvokäyrän (tai -pinnan) tangentin (tangenttitason) suuntainen, joten gradientti on normaalin suuntainen.

Pinnan normaali ja tangenttitaso

Jos pinnan yhtälö esitetään muodossa $F(x, y, z) = 0$, saadaan edellisen perusteella pinnan tangenttitason yhtälö pisteessä p_0 näin:

$\nabla F(p_0)\dot{(}p - p_0) = 0$

Jos pinta on annettu muodossa $z = f(x, y)$, saadaan siten normaalin suunta funktion $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ gradienttina.

Tästä seuraa, että pisteeseen p_0 asetetun tangenttitason yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$z - z_0 = f_1(p_0)(x - x_0) + f_2(p_0)(y - y_0).$$

($f_1$ja f_2 tarkoittavat osittaisderivaattoja.)

Kahden pinnan leikkauskäyrän tangentti

Leikkauskäyrän tangentti on kohtisuorassa molempien pintojen normaalia vastaan (eikö vain!). Siten leikkauskäyrän tangentin suuntainen vektori saadaan pinnan normaalivektorien ristitulona $\mathbf{t} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}$.

Kriittiset pisteet, ääriarvot

Kriittinen piste (KRP) p: $\nabla f(p) = 0$.
Kriittisen pisteen laatu selviää (jos selviää) Hessen matriisin $H_f(p)$ definiittisyydestä.
Symmetrisen matriisin definiittisyyskäytös selvitetään ominaisarvojen avulla. Jos matriisi on $2 \rtimes 2$, voidaan käyttää determinanttia (kts. tehtävä mplV006a). Isommillekin matriiseille on determinanttiehtoja, mutta ne on hankala muistaa ja käyttää, jääkööt muistoksi “determinanttien kulta-ajoilta”.

Maple-ohjeita

Vektorikenttä ja gradientti

```
with(linalg): with(plots):
fieldplot(grad(f(x,y),[x,y]),x=a..b, y=c..d,arrows=slim,color=x);
# a:lla, b:lla jne. oltava tietysti numeeriset arvot.
```

Uusissa Maplen versioissa on kirjastopakkaus `VectorCalculus` ja siellä funktio `Gradient` lukuisine valitsimineen. Kts. helppi. Vanhan `linalg`-kirjaston kunnon `grad` on perustarpeisiin ehkä yksinkertaisin ja helppokäyttöisin.

Oma pikku funktio on usein selkein, se voidaan määritellä ongelmakohtaisesti esim. toimimaan vain 2d-tilanteessa. Tällainen gradienttifunktio voitaisin kaikessa yksinkertaisuudessaan määritellä näin: `gradi2:=(f,x,y)->[diff(f,x),diff(f,y)]`

Pintapiirroksen "valaiseminen" esim. avaruuskäyrillä

Usein pintapiirrosta voidaan täsmentää ja tarkentaa ja ymmärtää paremmin, kun piirretään sopivia avaruuskäyriä pinnalle `spacecurve`:lla.

Alla on esimerkki, jossa piirretään napasädettä pitkin kulkevan pystytason ja annetun pinnan leikkauskäyrä sekä käyrän projektio xy-tasossa. Varsin käyttökelpoinen tapa monessa yhteydessä. Tätä voi modifioida tarpeen mukaan.

```
> with(plots):
> f:=(x,y)->4-x^2-y^2;
> x:=r*cos(Theta):y:=r*sin(Theta): Theta:=Pi/4:
> pystyleikkaus:=spacecurve({[x,y,f(x,y)],[x,y,0]},r=0..2,thickness=3,
color=blue,axes=BOX)
> x:='x':y:='y':  # On hyv\"a muistaa vapauttaa.
> pinta:=plot3d(...):   # Muista t\"ass\"a tavassa lopettaa kaksoispisteeseen.
> display([pinta,pystyleikkaus],style=patchcontour);
> display(pystyleikkaus);  # Katsotaan pelkk\"a\"a leikkausk\"ayr\"a\"a.
```

2. mplV001.tex
Piirrä seuraavien funktioiden tasa-arvokäyrät:

a) $x^3 - xy^3$

b) $\sin(x) cosh(y)$

c) $\cos^2(x)\cosh(y)$

Vihje: Tasa-arvokäyriä voi piirtää kommennolla `contourplot` (ensin `with(plots)`).

3. mplV0011.tex

Mitkä ovat seuraavien funktioiden luonnolliset määrittelyjoukot:

a) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$, b) $f(x,y) = \ln(1+xy)$ c) $f(x,y) = \arcsin(x+y)$.

Piirrä (ensin käsin ja sitten Maplella) tasoon kunkin määrittelyjoukon kuva. Mitä topologisia ominaisuuksia joukoilla on? (*avoin, suljettu, rajoitettu, yhtenäinen, joukon reuna*, jne.)

Muodosta näiden funktioiden korkeuskäyrien (tasa-arvokäyrien) yhtälöt. Muodosta myös pystyleikkauskäyrät tasojen $x = 1$ ja $y = 1$ kanssa kussakin tapauksessa. Hahmottele käsin ja piirrä Maplella.

Vihje: Tasa-arvokäyriä voi piirtää kommennolla `contourplot` (ensin `with(plots)`). Lisää Maple-ohjeita 1. "tehtävässä" mplV000.tex.

4. mplV0012.tex

Onko seuraavilla funktioilla raja-arvo, kun $(x,y) \to (0,0)$:

$$\text{a)} \quad \frac{x}{|x|+|y|} \qquad \text{b)} \quad \frac{x^2}{|x|+|y|}$$

Suorita Maplella visualisointeja.

Vihje: Tasa-arvokäyriin: `contourplot` (ensin `with(plots)`), pintoihin: `plot3d` (ei tarvitse latauksia) . Lisää Maple-ohjeita "tehtävässä"1.(mplV000.tex).

5. mplV0013.tex

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x^2 < y < 2x^2, \\ 0, & \textit{muulloin.} \end{cases}$$

Osoita, että funktiolla on sama raja-arvo origossa lähestyttäessä mitä tahansa suoraa pitkin, mutta siitä huolimatta varsinaista raja-arvoa ei ole olemassa. Missä pisteissä funktio on jatkuva ja missä taas ei?

Suorita Maplella visualisointeja.

Vihje: Kulje erityisesti O:sta alkavaa nousevaa sädettä (kulmakerroin posit.) 1. neljänneksessä kulkien sitä alaspäin kohti origoa. Mitä tapahtuu lopulta, kun ollaan riittävän lähellä O:a?

Ratkaisu: Piirrä kuvaaja funktion rajoittumasta mielivaltaiselle origon kautta kulkevalle suoralle; tutki tätä varten, missä pisteissä ko. suora leikkaa paraabelit $y = x^2$ ja $y = 2x^2$. Funktio on epäjatkuva näillä paraabeleilla.

6. mplV0014.tex

(a) Muodosta funktion $\ln(1 + e^{x^2 y^3 z})$ 1. kertaluvun osittaisderivaatat kaikkien muuttujien suhteen.

(b) Osoita, että funktio $\arctan \frac{y}{x}$ toteuttaa *Laplacen osittaisdifferentiaaliyhtälön*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(Tällaisia funktioita sanotaan *harmonisiksi funktioiksi.*)

Vihje: Laske ainakin joku käsin ja tarkista kaikki Maplella. Tällaiset mekaaniset, tarkkuutta vaativat tehtävät ovat onnen omiaan CAS-ohjelmille, kuten Maple, Mathematica. Maplen `diff` hoitelee homman.

7. mplV0015.tex
(Myös mplDi017.tex (poistetaan))
Oletetaan, että funktioilla $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on jatkuvat toiset osittaisderivaatat ja ne toteuttavat ns. *Cauchy-Riemannin* yhtälöt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Osoita, että u ja v ovat harmonisia, eli toteuttavat Laplacen differentiaaliyhtälön:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Vihje: Sopii sekä käsinlaskuun että Maplelle. Maple olettaa säännöllisyyttä tarpeeksi, jotta sekaderivaatat yhtyvät. Käyttäjän on tiedettävä, mitä pitää olettaa.

Mapletekniikkaa: b) Kirjoita CR-yhtälöt tyyliin

```
diff(u(x,y),x)=diff(v(x,y),y)
```

Maplen diff-operattorin täytyy tietää, että lauseke, johon derivointi kohdistuu, sisältää muuttujat x ja y. Muussa tapauksessa se räväyttää ilman muuta tuloksen 0 (nolla), joka on samalla tehtävän suorituksen arvo.

Ratkaisu: mplVektori/mplV0015R.mw ja .pdf

8. mplV0016.tex
Olkoon $f(x, y) = x^3 y^2 + x^4 \sin y + \cos(xy)$. Laske osittaisderivaatat f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx} ja totea, että ne ovat samat.

Voit antaa Maplen laskea.

9. mplV0017.tex
Laske yhdistetyn funktion derivoimissääntöä (eli ketjusääntöä, "chain rule") käyttäen $\frac{\partial w}{\partial s}$ ja $\frac{\partial w}{\partial t}$, kun

(a) $w = x \ln(x^2 + y^2), \quad x = s + t, y = s - t$,
(b) $w = e^{x+2y} \sin(2x - y), \quad x = s^2 + t^2, \quad y = 2s^2 - t^2$

Tee käsin ja tarkista Maplella.

10. mplV0018.tex
Kolmionmuotoisen maa-alan kahden sivun mitatut pituudet ovat 224 m ja 158 m ja niiden välinen kulma 64° . Pituusmittauksen virheraja on 0.4 m ja kulman 2° . Mikä on pinta-alan likimääräinen suhteellinen maksimivirhe.

Vast: n. 2 %

11. mplV0019.tex

Osittaisderivoituvan funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *gradientti* ∇f määritellään näin

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\vec{i} + f_y(x, y)\vec{j}$$

.

Olkoon $f(x, y) = |xy|$.
(a) Piirrä tasa-arvokäyrät(korkeuskäyrät) $f(x, y) = k, k = 1, 2, 3.$
(b) Piirrä f:n gradienttikenttävektoreita `fieldplot`:n avulla samaan kuvaan korkeuskäyräpiirrosten kanssa. Kun käytät samaa skaalaa akseleilla pitäisi kuvasta näkyä, miten gradienttivektorin ja korkeuskäyrän suunnat suhtautuvat toisiinsa.

Vihje: Gradientti voidaan ladata useastakin kirjastosta. Selvintä on määritellä itse:
`gradi2:=(f,x,y)->[diff(f,x),diff(f,y)]`
(Voit myös ladata: `with(linalg);` ja saat käyttöön funktion `grad`)

`with(plots)` lataa `contourplot`- ja `fieldplot`-funktiot.
Grafiikkojen yhdistäminen:

```
kuva1:=contourplot(...)
kuva2:=fieldplot(...)
display(kuva1,kuva2);
```

12. mplV00191.tex

Työarkilla `../L/pintoja.mws` kohdassa "toinen esimerkki"tarkastellaan funktiota $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. Sekä plot3d- että contourplot-kuvat ovat lievästi sanoen harhaisia. (Toki erilaisilla optioilla voi plot3d-kuvaa olennaisesti parantaa.) Selvitä, minkälainen kuvaaja todellisuudessa on. Tarvitset taas sekä Maplea että kynää ja paperia. Piirtele myös pystyleikkauksia, oikeita korkeuskäyriä ym.

Vihje: Usein pintapiirrosta voidaan täsmentää ja tarkentaa ja ymmärtää paremmin, kun piirretään sopivia avaruuskäyriä pinnalle `spacecurve`:lla.

Alla on esimerkki, jossa piirretään napasädettä pitkin kulkevan pystytason ja annetun pinnan leikkauskäyrä sekä käyrän projektio xy-tasossa. Varsin käyttökelpoinen tapa monessa yhteydessä. Tätä voi modifioida tarpeen mukaan.

```
> with(plots):
> f:=(x,y)->4-x^2-y^2;
> x:=r*cos(Theta):y:=r*sin(Theta): Theta:=Pi/4:
> pystyleikkaus:=spacecurve({[x,y,f(x,y)],[x,y,0]},r=0..2,thickness=3,
color=blue,axes=BOX)
> x:='x':y:='y':  # On hyv\"a muistaa vapauttaa.
> pinta:=plot3d(...):   # Muista t\"ass\"a tavassa lopettaa kaksoispisteeseen.
> display([pinta,pystyleikkaus],style=patchcontour);
> display(pystyleikkaus);  # Katsotaan pelkk\"a\"a leikkausk\"ayr\"a\"a.
```

13. mplV00192.tex

Maaston korkeus (merenpinnasta mitattuna) karttakoordinaattien funktiona olkoon

$$h(x, y) = -x^2 + 4xy - 8y^2 + 300.$$

Positiivinen x-akseli osoittaa itään ja positiivinen y-akseli pohjoiseen.

a. Kulkuri K ottaa pisteestä $(1, 2, h(1, 2))$ lähtöaskeleen kaakkoon. Nouseeko hän vai laskeutuuko?
Tämä on käsinlaskutehtävä, mutta tee Maplella. Havainnollista Maplepiirroksin: Pintapiirros: `plot3d`, korkeuskäyrät: `contourplot` tai `implicitplot`. Leikkauskäyrä kaakko-luode-suuntaisen pystytason kanssa.

b. Muodosta funktion $h(x, y)$ gradienttifunktio (gradienttikenttä). Piirrä gradienttikenttä `plots`-pakkauksen funktiolla `fieldplot`. Yhdistä korkeuskäyräpiirros tämän kanssa `display`-funktion avulla.

Vihje: Gradienttikentän voi laskea (tietysti käsin) tai derivoimalla Maplen `diff`:llä tai `linalg`-pakkauksen funktiolla `grad`. Ei ole pahitteeksi, jos kokeilet kaikkia tapoja.

14. mplDi0019a.tex

Osittaisderivoituvan funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *gradientti* ∇f määritellään näin $\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$.

Olkoon $f(x, y) = |xy|$.

(a) Piirrä tasa-arvokäyrät(korkeuskäyrät) $f(x, y) = k, k = 1, 2, 3.$

(b) Piirrä f:n gradienttivektoreita $\nabla f(x, y)$ tasa-arvokäyrien pisteisiin. Kun käytät samaa skaalaa akseleilla (`scaling=constrained`), pitäisi kuvasta näkyä, miten gradienttivektorin ja korkeuskäyrän suunnat suhtautuvat toisiinsa.

Vihje:

Aloita työarkki näin:

```
> restart:
> with(plots): with(plottools):
> nuoli:=(alkup, loppup,vari)->arrow(alkup,loppup,0.01,0.05,0.02,color=vari);
> korkeuskayra:=k->implicitplot(abs(x*y)=k,x=-2..2,y=-2..2);
> #  Maariteltiin grafiikka-arvoinen funktio, usein tosi katevaa!
> kkparvi:=display(seq(korkeuskayra(k),k=1..3);
>
```

Kts. lisää: mplDi0002Apu.mw

15. mplV003.tex

Piirrä avaruuskäyrä

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\cos t}{t}\,\mathbf{i} + \frac{\sin t}{t}\,\mathbf{j} + \arctan t\,\mathbf{k},$$

kun $t \in [1, T]$ ja $T = 100$. Määritä käyrän kaarenpituus ja tutki, onko sillä raja-arvoa, kun $T \to \infty$.

Vihje: Käyrä on luontevinta kirjoittaa listaksi `r = [cos(t)/t,sin(t)/t,arctan(t)]` ja laskea kaarenpituus integraalista $\int |\mathbf{r}'(t)|\, dt$.

16. Määritä funktion $f(x, y) = x^2 - y$ suurin arvo ympyrällä $x^2 + y^2 = 1$. Käytä Lagrangen menetelmää.

Vihje: `(diff, solve, f:= (x,y)->(x2+y)`. Jos et ehdottomasti osaa Lagrangen menetelmää, lataa `with(Student[MultivariateCalculus])` ja tutki *LagrangeMultipliers*-dokumentaatiota.

17. mplV006.tex
Lausu neliömuodon $q(x) = x^T Ax$ definiittisyydet symmetrisen matriisin A ominaisarvojen (merkkien) avulla.

(Määritelmä paperin lopussa (tai kokoelman alussa).)

Vihje: Lausu neliömuoto pääakselikoordinaattien y_i avulla, sitten voit lukea kuin avointa kirjaa.
(Puhdas päättelytehtävä, "tietokonevapaa".)

18. mplV006a.tex
(Puhdas päättelytehtävä, "tietokonevapaa".)
Osoita 2×2 symmetrisen matriisin A tapauksessa, että matriisi on

- definiitti (pos. tai neg.), jos ja vain jos $\det(A) > 0$,
- indefiniitti, jos ja vain jos $\det(A) < 0$,
- semidefiniitti, jos ja vain jos $det(A) = 0$

Vihje: Kirjoita $A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ ja muodosta karakteristinen polynomi. Käytä hyväksesi toisen asteen yhtälön juurien ominaisuuksia. (Jos et muista, niin kerro auki $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$.)

Ratkaisu: mplV006aR.pdf ja .mw (html:ssa *ratkaisu*-linkki)

19. mplV006b.tex
Määritä seuraavien neliömuotojen matriisit sekä definiittisyys:

(a) $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2$
(b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
(c) $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_4^2 - 4x_2x_3$

Esitä neliömuodot pääakselikoordinaateissa. Ei ole pahitteeksi, vaikka piirrät joitakin kuvia.

Vihje:

Avainsanat: 1neliomuoto,1pos1neg1definiitti, 1paaakseliprobleema, 1principalaxes,1ominaisarvot,1eigenva

20. mplV006c.tex
Mitä kartioleikkausta edustaa yhtälö $x_1^2 + 24x_1x_2 - 6x_2^2 = 5$

Muunna yhtälö pääakselimuotoon ja piirrä kuva. (Voit ottaa mallia `KRE` Exa 6 s. 396 "Transformation to principal axes".)

tai GRE 11.6 s. 589 Voit myös katsoa: `http://www.math.hut.fi/teaching/y3/harj/tyo/heigen.html`

Muista: Hyperbelin luonteva parametriesitys on $x = a\cosh t, \quad y = b\sinh t$

Maple-ohjeita: harj6ohje.mws -TODO!-

Vihje:

Avainsanat: 1neliomuoto,1pos1neg1definiitti, 1paaakseliprobleema, 1principalaxes,1ominaisarvot,1eigenva

21. TV-yhtiö on (pahaa aavistamatta) palkannut matemaatikon seikkailukilpailun juontajaksi. Kilpailussa tehtävänä on kiertää mahdollisimman lyhyt reitti sen kolmion sisällä, jonka kärjet ovat pisteissä $(0,0),(2,0)$ ja $(0,2)$. Lähtö tapahtuu pisteestä $(1,0)$, ja kilpailijan tarvitsee koskettaa jokaista muuta kolmion sivua ja palata sitten alkupisteeseen Määritä lyhin tällainen reitti, ja sen pituus.

Vihje: Muodosta matkan funktio $f(x,y)$ – mieti ensin, mitä kuvaa x ja mitä y, ja sen jälkeen, kuinka etäisyys laskettaisiin (vihje: Euklidinen etäisyys). Tämän jälkeen etsi funktion f kriittiset pisteet, eli osittaisderivaattojen nollakohdat, ja tutki niiden laatua. Valitse näistä pisteistä minimin tuottava, ja laske pituus.

22. DOKU mplV0001.tex
Joudut tekemään vastuunalaisen päätöksen mitoista valmistettaessa laatikkoa. Pohjamateriaali on kaksi kertaa niin kallista pinta-alayksikköä kohti kuin sivu- tai kansimateriaali. Millä mitoilla saat V-tilavuuksisen laatikon materiaalikustannukset minimoiduksi? Perustele, että ratkaisusi on globaali minimi joukossa $\{(x,y)|x>0,y>0\}$. (Toisia derivaattoja ei välttmättä tarvita.) (Käytä Maplea sydämesi kyyllydestä, vaikka käsinlaskullakin selviäisit.)

23. mplV010.tex
Määritä funktion $f(x,y)=\frac{1}{2+x-2y}$ astetta 2 oleva Taylorin polynomi kehitettynä pisteessä $(2,1)$ Tee 2. asteen polynomi ensin käsin ja sitten Maplella. Kts. myös ohjetiedostoa (tulee).

Avainsanat: Usean muuttujan Taylorin polynomi, diff, D, perushelppo .

Ratkaisut tehtäviin mplV010 ja mplV011: “ratkaisut”-linkistä (molemmat samassa työarkissa).

24. mplV011.tex

a) Muodosta funktion $f(x,y)=\cos(x+\sin y)$ toisen asteen Taylorin polynomi kehitettynä $(0,0)$:ssa. Miten hyvän approksimaaton saat arvolle $f(0.1,-0.2)$? (Vertaa laskimen tai Maplen antamaan arvoon, ei tarvitse miettiä jäännöstermiarviota.)

b) Määritä funktion $f(x,y)=\frac{1}{2+x-2y}$ asteita 2,3 ja 4 olevat Taylorin polynomit kehitettynä pisteessä $(2,1)$

b) Piirrä funktio $f(x,y)$ ja eriasteisia Taylorin polynomeja pintapiirrokisna ja/tai korkeuskäyrinä.

Kts. myös harj7ohje.mws

Avainsanat: Usean muuttujan Taylorin polynomi, diff, mtaylor,plot3d,contour.

Vihje: a)-kohta on käsinlasku, tarkistukseen siinäkin Maplen *diff*. b)-kohta Maplen *diff*-funktiolla. Lopuksi voit kokeilla myös *mtaylor*-komentoa. (Tarkoitus on Maple-avusteinen oppiminen, ei liian valmiiden “nappuloiden” paineleminen.)

Ratkaisut tehtäviin mplV010 ja mplV011: “ratkaisut”-linkistä (molemmat samassa työarkissa).

25. mplV012.tex
Määritä funktion $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ kriittiset pisteet (KRP) ja niiden luonne. (min/max/satula/singulaa
Havainnollista piirroksin.

Avainsanat: Kriittiset pistet, min/max, osittaiderivaatta, nollakohta.

Vihje: Yhtälösysteemin ratkaisu: `solve({yht1,yht2},{x,y});` Polynomiyhtälöissä kannattaa usein jatkaa komennolla `allvalues`. Numeerinen ratkaisu: `fsolve`

26. mplV013.tex
Määritä funktion

$$f(x, y) = \cos x + \cos y$$

kriittiset pisteet (KRP) ja niiden luonne. (min/max/satula/singulaari) Havainnollista piirroksin.

Avainsanat: Kriittiset pisteet, min/max, osittaiderivaatta, nollakohta.

Vihje: Yhtälösysteemin ratkaisu: `solve({yht1,yht2},{x,y});`

27. mplV014.tex
Joudut tekemään vastuunalaisen päätöksen mitoista valmistettaessa laatikkoa. Pohjamateriaali on kaksi kertaa niin kallista pinta-alayksikköä kohti kuin sivu- tai kansimateriaali. Millä mitoilla saat V-tilavuuksisen laatikon materiaalikustannukset minimoiduksi? Perustele, että ratkaisusi on globaali minimi joukossa $\{(x, y)|x > 0, y > 0\}$. (Toisia derivaattoja ei välttmättä tarvita.)

Avainsanat: minimointi,optimointi, osittaiderivaatta, nollakohta.

Vihje: Sopii puhtaasti käsinlaskuun, toki saa käyttää Maplea laskuapualaisena.

28. mplV015.tex
"Projektitehtävä", saa tehdä 2:n hengen ryhmässä. Maksimisuoritus: 3 tavallista rastia.

Määritä funktion $f(x, y) = 1/x + 1/y + \sin(x^2y^2)$ suurin ja pienin arvo joukossa $[1, 2] \times [1, 2]$

Tietysti piirrät pintaa ja korkeuskäyriä.

Avainsanat: min/max,optimointi, osittaiderivaatta, nollakohta, työläisehkö.

29. mplV016.tex
Määritä funktion $f(x, y) = x^3+y^3-3xy$ kriittiset pisteet (KRP) ja niiden luonne. (min/max/satula/singulaa
Havainnollista piirroksin.

Avainsanat: Kriittiset pisteet, min/max, osittaiderivaatta, nollakohta.

Vihje: Yhtälösysteemin ratkaisu: `solve({yht1,yht2},{x,y});` Polynomiyhtälöissä kannattaa usein jatkaa komennolla `allvalues`. Numeerinen ratkaisu: `fsolve`

30. mplV017.tex

a. Olkoon $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$.
Määritä pinnan $z = f(x, y)$ tangenttitaso pisteessä $(2, -1)$. Piirrä pinta ja tangenttitaso ja pyörittele ja zoomaa.

b. Sama pinnalle $z = \arctan \frac{y}{x}$ pisteessä $(2, 2, \pi/4)$.

Vihje: (Kts. ..H/harj6ohje.mws) -TODO-

Avainsanat: 1mplVektori,1tangenttitaso,1tangent1plane,1several1variables

31. mplV018.tex

Määritä lieriöiden

$$x^2 + y^2 = 2, \quad y^2 + z^2 = 2$$

leikkauskäyrän pisteen $(1, -1, 1)$ kautta kulkevan tangentin yhtälö.

Lieriöpinnan piirtäminen sujuu hyvin `plot3d`:llä. Kannttaa ajatella lieriö (kahdesta parametristä riippuvana) parametrimuotoisena pintana. Ensimmäisen lieriön luonnollinen parametriesitys on $x = \sqrt{2}\cos t, y = \sqrt{2}\sin t, z = z$. Tässä siis t ja z ovat parametreja.

Edellinen voisi näyttää tältä:

```
plot3d([sqrt(2)*cos(t),sqrt(2)*sin(t),z],t=0..2*Pi,z=c..d);
```

Jälkimmäinen vastaavasti. Kuvat yhdistetään:

```
display(kuva1,kuva2);
```

Huom! `plot3d` on monipuolinen funktio, sille voi antaa pinnan muodossa $f(x, y)$, mutta myös parametrimuodossa yllä kaavailtuun tapaan.

32. Määritä funktion $f(x, y) = x^2 - y$ suurin arvo ympyrällä $x^2 + y^2 = 1$. Käytä Lagrangen menetelmää.

Vihje: `(diff, solve, f:= (x,y)->(x2+y)`. Jos et ehdottomasti osaa Lagrangen menetelmää, lataa `with(Student[MultivariateCalculus])` ja tutki *LagrangeMultipliers*-dokumentaatiota.