

Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuksen päivät
Jyväskylä 8.-9.11.2012

Aloittavien matematiikan opiskelijoiden näkemyksiä matematiikasta

Antti Viholainen, Mervi Asikainen ja Pekka E. Hirvonen
Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

Linda Havola ja Antti Rasila
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Terhi Hautala ja Juha Oikonen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto



ITÄ-SUOMEN YLIOPISTO

Tutkimuksen tarkoitus

- Tutkimuksessa selvitetään yliopisto-opintojaan aloittavien matematiikan opiskelijoiden uskomuksia ja näkemyksiä matematiikasta ja sen oppimisesta.
- Tämän tutkimuksen teemoja ovat:
 - Matematiikkaorientaatiot
 - Matemaattinen itseluottamus
- Tutkimuksessa selvitetään koulutusohjelmavalinnan vaikutusta matematiikkaorientaatioon ja matemaattiseen itseluottamukseen: Onko opettajaopiskelijoiden, matemaatikko-opiskelijoiden ja matematiikan soveltajaopiskelijoiden välillä eroa näiden asioiden suhteen?



Tutkimuksen tarkoitus

- Tutkimuksen aineisto kerättiin syksyllä 2012 elektronisen kyselylomakkeen avulla.
- Tutkimukseen osallistui opiskelijoita seuraavilta laitoksilta:
 - Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto (Joensuun kampus)
 - Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
 - Aalto-yliopisto



Matematiikkaorientaatiot

- *Formalismiorientaatio* tarkoittaa, että matematiikka nähdään annettuna staattisena rakennelmana, jolla on aksiomaattinen luonne. Oppimisen tavoitteena on tämän rakennelman tunteminen ja ymmärtäminen.
- *Skeemaorientaatio*ssa matematiikka nähdään laskusääntöjen, kaavojen ja menetelmien kokoelmana. Oppimisen tavoitteena on näiden sujuva käyttö.
- *Prosessiorientaatio*ssa matematiikka nähdään aktiivisena konstruktiosprosessina. Matematiikan perusluonne on dynaaminen ja muuttuva. Oppimisessa keskeisiä ovat ajattelu- ja päättelytaidot ja kyky luoda uutta.
- *Sovellusorientaatio*ssa matematiikka nähdään menetelmänä kuvata todellisuutta. Oppimisen tavoitteena on ymmärtää reaali maailman ilmiöiden ja niitä kuvaavien matematiikan käsitteiden välisiä yhteyksiä ja oppia soveltamaan matematiikkaa eri yhteyksissä.



Kaksi näkemystä matematiikan oppimisesta

Tässä tutkimuksessa asetetaan vastakkain erityisesti skeemaoppiminen ja prosessioppiminen.

Skeemaoppiminen (väitteet kyselystä)

- Paras tapa pärjätä matematiikassa on muistaa kaikki kaavat.
- Oppilaille tulee opettaa täsmällisiä menetelmiä matemaattisten ongelmien ratkaisemiseksi.
- Menestyäkseen matematiikassa oppilaan tulee olla hyvä kuuntelija.
- Ollakseen hyvä matematiikassa pitää kyetä ratkaisemaan ongelmat nopeasti.
- Oppilaat oppivat parhaiten matematiikkaa seuraamalla opettajan selityksiä.



Kaksi näkemystä matematiikan oppimisesta

Skeemaoppiminen

- Matematiikan opetuksessa tulisi välttää epätyypillisiä ratkaisumenetelmiä, koska ne voivat haitata oikeiden menetelmien oppimista.
- Oppilaiden tulee harjoitella runsaasti tullakseen paremmiksi matematiikassa.
- Seuraamalla ammattimatematiikan ”ääneenajattelua” voi oppia todella paljon.



Kaksi näkemystä matematiikan oppimisesta

Prosessioppiminen (väitteet kyselystä)

- Opettajan tulisi antaa oppilaiden löytää omat tapansa ratkaista matemaattisia ongelmia.
- Kun opettaja huomaa, että oppilaalla on vaikeuksia sanallisen tehtävän ratkaisemisessa, hänen tulisi antaa oppilaan jatkaa ratkaisun etsimistä.
- Oikean vastauksen saamisen lisäksi on tärkeää ymmärtää, miksi vastaus on oikein.
- On järkevää käyttää aikaa sen tutkimiseen, miksi matemaattisen ongelman ratkaisu toimii.
- Oppilaat voivat löytää tavan ratkaista matemaattisia ongelmia ilman opettajan apua.



Kaksi näkemystä matematiikan oppimisesta

Prosessioppiminen

- Opettajan tulisi rohkaista oppilaita etsimään omia ratkaisuja matemaattisiin ongelmiin, vaikka näin muodostuvat ratkaisut olisivatkin puutteellisia.
- Oppilaiden on hyödyllistä keskustella eri tavoista ratkaista ongelmia.

Lisäksi seuraavat väittämät ovat vastakkaisia prosessioppimisnäköykselle:

- Matemaattisen ongelman ymmärtäminen ei ole tärkeää, jos vain onnistuu saamaan oikean vastauksen.
- Matemaattisessa ongelmanratkaisussa on tärkeämpää painottaa oikean vastauksen saamista kuin ongelmanratkaisuprosessia.



Kyselylomake

Matematiikkaorientaatioita koskeva osuus:

- Esitettiin väittämiä, joihin vastaajien tuli ottaa kantaa käyttäen kuusiportaista likert-asteikkoa.
- Kysymykset olivat käännöksiä kansainvälisessä Mathematics teaching in the 21st Century –tutkimuksessa käytetystä kyselylomakkeesta (Schmidt, Blömeke & Tatto, 2011).

Matemaattista itseluottamusta koskeva osuus:

- Aluksi vastaajia pyydettiin arvioimaan luottamusta omaan osaamiseensa matematiikan eri osa-alueilla.
- Tämän jälkeen esitettiin yhdeksän tehtävää. Vastaajia pyydettiin kuinkin tehtävän kohdalla arvioimaan, kuinka luottavaiseksi he tunsivat itsensä sen suhteen, että kykenisivät ratkaisemaan kyseisen tehtävän



Kyselylomake

- Kumpaankin kysymystyyppiin vastattiin käyttäen neliportaista likert-asteikkoa.
- Kysymykset olivat hieman varioituja käännöksiä Manchesterin yliopiston johtamassa TransMath-projektissa (<http://www.education.manchester.ac.uk/research/centres/lta/lta-research/transmaths/into-he/>) käytetystä kyselylomakkeesta.

Kansainvälisten kyselylomakkeiden käyttö mahdollistaa tulosten vertaamisen muissa maissa toteutettujen vastaavien tutkimusten tuloksiin.



Verrattavat ryhmät

1. Opettajat: 42 matematiikan aineenopettajaa, 12 MALOKO-opiskelijaa ja 18 matematiikkaa sivuaineena lukevaa opettajaopiskelijaa. Yhteensä 72 opiskelijaa.
2. Matemaatikot: Pääaineena matematiikka. Eivät aio hakea opettajankoulutukseen tai ovat asiasta epävarmoja. Yhteensä 71 opiskelijaa.
3. Matematiikan soveltajat: Pääaineena joku muu kuin matematiikka. Eivät aio hakea opettajankoulutukseen tai ovat asiasta epävarmoja. Yhteensä 166 opiskelijaa.

Yhteensä 309 opiskelijaa.

Kaikista vastaajista 280 (90,6 %) oli suorittanut pitkän matematiikan ylioppilaskokeen. 12 soveltajaopiskelijaa ja yksi opettajaopiskelija olivat suorittaneet lyhyen oppimäärän kokeen.



Verrattavat ryhmät

- Matematiikan pitkän oppimäärän suorittaneiden arvosanajakaumat:

	Opettaja	Matemaatikko	Soveltaja	Yhteensä
I	0	0	1	1
A	0	0	2	2
B	1	1	4	6
C	3	3	13	19
M	28	11	26	65
E	25	39	49	113
L	8	14	50	72
Puoltoäänimäärän keskiarvo (vain pitkän kirjoittaneet)	5,55	5,91	5,81	5,77

Verrattavat ryhmät

Opettajaopiskelijoiden yo-kokeen puoltoäänimäärä on merkitsevästi alempi kuin muiden vastaajien ($p = .003$).

Yo-kokeen puoltoäänimäärä on huomioitu vain pitkän oppimäärän kokeen suorittaneilta vastaajilta.



Matematiikkaorientaatioiden voimakkuus

- Matematiikkaorientaatiotesti sisälsi 20 väittämää.
- Vastausten perusteella pystyttiin laskemaan kullekin orientaatiolle sen voimakkuutta kuvaava tunnusluku. Tunnusluvun arvot olivat välillä 1-6, missä arvo 1 tarkoittaa kyseiselle orientaatiolle voimakkaasti vastaista näkemystä ja arvo 6 kyseiselle orientaatiolla erittäin myönteistä näkemystä.
- Vastaavat tunnusluvut laskettiin myös suhtautumiselle skeemaoppimiseen ja prosessioppimiseen.



Matematiikkaorientaatioiden voimakkuus

Koulutusohjelmaluokka	Formaali	Skeema	Prosessi	Sovellus
Opettaja (N=70)				
Mean	4,66	4,12	4,67	4,86
Std. Deviation	,718	,596	,682	,809
Matemaatikko (N=67)				
Mean	4,83	4,14	4,94	4,96
Std. Deviation	,843	,725	,618	,862
Matematiikan soveltaja (N=163)				
Mean	4,87	4,20	4,55	4,69
Std. Deviation	,727	,759	,833	,875
Yhteensä(N=300)				
Mean	4,81	4,17	4,67	4,79
Std. Deviation	,754	,715	,769	,862



Matematiikkaorientaatioiden voimakkuus

Ryhmien välisiä eroja matematiikkaorientaatioiden suhteen tutkittiin käyttäen Mann-Whitneyn U-testiä riippumattomille otoksille. Seuraavat tilastollisesti merkitsevät erot havaittiin:

- Opettajaksi aikovilla opiskelijoilla formalismiorientaatio oli heikompi kuin muilla ($p = .022$).
- Matematiikko-opiskelijoilla prosessorientaatio ja sovellusorientaatio olivat voimakkaampia kuin muilla ($p = .001$ ja $p = .049$).
- Matematiikan soveltajaopiskelijoilla sekä prosessorientaatio että sovellusorientaatio olivat heikompia kuin muilla ($p = .014$ ja $p = .028$).



Korrelaatioita (Spearman)

- Formalismiorientaatio korreloi positiivisesti ($p < .001$) ja skeemaorientaatio negatiivisesti ($p < .01$) ylioppilaskokeen matematiikan arvosanan kanssa. Sen sijaan prosessi- ja sovellusorientaatiot eivät korreloi merkitsevästi arvosanan kanssa. Vain pitkän matematiikan kirjoittaneet ($N=272$) on huomioitu tässä tarkastelussa.
- Prosessorientaatio korreloi positiivisesti sekä formalismiorientaation ($p < .001$) että sovellusorientaation ($p < .001$) kanssa ja negatiivisesti skeemaorientaation kanssa ($p < .01$).
- Lisäksi formalismi- ja sovellusorientaatio korreloivat positiivisesti ($p < .01$).



Keskiarvoja: Skeemaoppiminen ja prosessioppiminen

Koulutusohjelmaluokka	Skeemaoppiminen	Prosessioppiminen
Opettaja (N=70)	3,23 (0,50)	4,81 (0,52)
Matemaatikko (N=66)	3,20 (0,52)	4,91 (0,54)
Matematiikan soveltaja (N=161)	3,26 (0,49)	4,73 (0,55)
Kaikki (N=297)	3,23 (0,50)	4,79 (0,55)

Skeemaoppiminen ja prosessioppiminen

- Skeemaoppimisnäkemysten suhteen koulutusohjelmaluokkien välillä ei havaittu tilastollisesti merkitsevää eroa.
- Matemaatikko-opiskelijoilla oli muita voimakkaampi prosessioppimisnäkemys ($p = .029$).
- Matematiikan soveltajaopiskelijoilla prosessioppimisnäkemys oli muita heikompi ($p = .026$).
- Skeemaoppimisnäkemysten ja prosessioppimisnäkemysten voimakkuudet korreloivat negatiivisesti ($p < .001$).



Matemaattinen itseluottamus

Kyselyssä opiskelijoita pyydettiin arvioimaan, kuinka vahvasti he luottavat omaan osaamiseensa matematiikan eri osa-alueilla.

Vastausasteikko oli neliportainen:

1=En luota lainkaan

2=Luotan jossakin määrin

3=Luotan melko vahvasti

4= Luotan hyvin vahvasti

Lisäksi testissä oli yhdeksän tehtävää. Kunkin tehtävän kohdalla vastaajaa pyydettiin arvioimaan, kuinka luottavaisia he olivat sen suhteen, että osaisivat ratkaista kyseisen tehtävän. Käytössä oli sama neliportainen asteikko kuin edellä.



Matemaattinen itsetuottamus

Keskimäärin opiskelijat luottivat **hyvin vahvasti** osaamiseensa seuraavilla matematiikan osa-alueilla (keskiarvo $\geq 3,5$):

- Peruslaskutoimitukset (KA 3,65)

Opiskelijat luottivat **melko vahvasti** osaamiseensa seuraavilla osa-alueilla ($2,5 \leq$ keskiarvo $< 3,5$):

- Lausekkeiden muokkaaminen ja sieventäminen (3,37)
- Suhde ja verrannollisuus (3,20)
- Geometria (2,94)
- Derivaatta ja integraali (2,94)
- Ongelmanratkaisu (2,87)
- Käytännön tilanteiden mallintaminen (2,72)



Matemaattinen itsetuottamus

Opiskelijat tuottivat jossakin määrin osaamiseensa seuraavilla osa-alueilla:

- Todennäköisyyslaskenta (2,42)
- Todistaminen (2,35)
- Kompleksiluvut (2,34)
- Tilastomatematiikka (2,33)
- ”Edistyneempi” differentiaali- ja integraalilaskenta (2,09)

Matematiikan soveltajaopiskelijoilla tuottamus ”edistyneempään” differentiaali- ja integraalilaskentaan oli heikompaa kuin muilla (KA 1,98; $p = .021$).

Muutoin koulutusohjelmaluokkien välillä ei havaittu merkitseviä eroja.

Matemaattinen itsetuottamus

- Vahvimmin opiskelijat tuottivat mekaanisten laskutaitojen hallintaan.
- Ongelmanratkaisun, käytännön tilanteiden mallintamisen ja erityisesti todistamisen suhteen itsetuottamus oli heikompaa.



Matemaattinen itseluottamus

Seuraavassa on esitettynä kyselylomakkeen tehtävät vastaajien luottamusta kuvaavien keskiarvojen mukaisessa järjestyksessä:

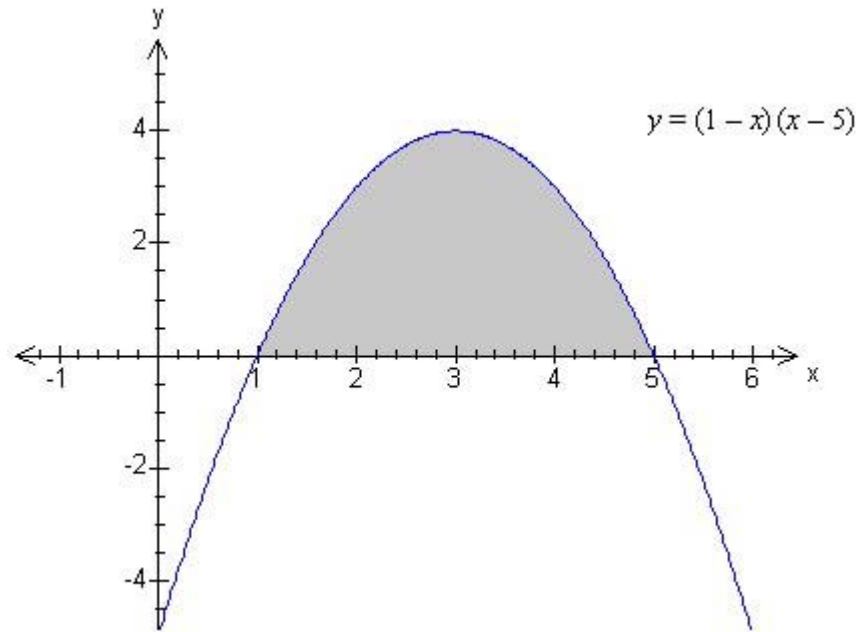
4. Määritä suoran $y + x = 5$ ja paraabelin $y = x^2 - 2x + 1$ leikkauspisteet.

(KA 3,89)



Matemaattinen itseluottamus

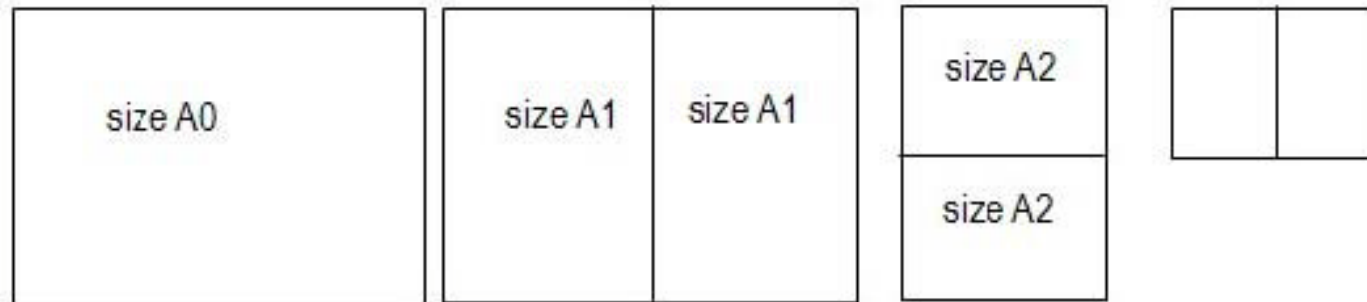
7. Määritä tummennetun alueen pinta-ala alla olevasta kuvaajasta.



(KA 3,57)

Matemaattinen itseluottamus

3. Alla olevassa kuviossa kunkin suorakulmion pituuden suhde korkeuteen on $\sqrt{2} : 1$. Suorakulmion A0 pinta-ala on 1 m². Suorakulmio A1 on saatu puolittamalla suorakulmio A0 kuvan mukaisesti. Suorakulmio A2 puolestaan on saatu puolittamalla suorakulmio A1. Määritä suorakulmion A4 sivujen pituudet millimetrin tarkkuudella.



(KA 3,55)

Tämän tehtävän kohdalla soveltajaopiskelijoiden luottamus oli korkeampi kuin muiden (KA 3,61; $p = .043$).

Matemaattinen itseluottamus

2. 150 000 euron asuntolainan vuosikorko on 1,8 %. Kuukausittain maksetaan sekä lyhennystä että korkoa yhteensä 650 euroa. Kuinka pitkän ajan kuluttua lainan pääoma on vähentynyt puoleen (75 000 euroon) edellyttäen, että korko pysyy muuttumattomana?

(KA 3,33)

5. Osoita, että toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ juurien tulo on c/a .

(KA 3,22)



Matemaattinen itseluottamus

6. Alla olevassa taulukossa on esitetty juomalasin ympärysmitta (circumference) eri korkeuksilla (height) juomalasin pohjasta. Mihin korkeuteen juomalasi tulee täyttää, jotta se olisi puolillaan kokonaistilavuuden suhteen? Lasin ollessa täynnä nestepinnan korkeus on 8,7 cm.



Height (cm)	Circumference (cm)
0.0	0.0
0.3	8.7
1.0	16.6
2.0	22.6
3.0	26.4
4.0	29.8
5.0	32.0
6.0	33.3
7.0	32.0
8.0	30.0
8.7	27.3

(KA 2,96)

Matemaattinen itseluottamus

8. Mehupullo, jonka lämpötila jääkaapissa on 2°C , nostetaan huoneenlämpöön 20°C ajanhetkellä $t=0$. Mehupullon lämpiämistä kuvaa differentiaaliyhtälö $dT/dt = (20 - T)/40$, missä T on pullon lämpötila ajanhetkellä t . Ilmaise pullon lämpötila T ajan t funktiona.

(KA 2,74)

9. Kokeilemalla havaitaan, että $x=1$ on yhtälön $y=x^3+x^2+2x-4$ eräs juuri. Etsi yhtälön kaksi muuta juurta, jotka ovat kompleksilukuja.

(KA 2,69)



Matemaattinen itseluottamus

1. Alla olevassa kuvaajassa punainen käyrä kuvaa Isossa Britanniassa liikenteessä kuolleitten ihmisten määrää biljoonaa (10^{12}) ajettua kilometriä kohti. Muodosta kuvaajan perusteella logaritmimuunnosta käyttäen eksponenttifunktio, joka mallintaa liikennekuolemien määrää vuosina 1975-2000.



(KA: 2,34)

Matemaattinen itsetuottamus

- Mekaanista laskemista vaativissa tehtävissä opiskelijoiden luottamus oli korkea.
- Hieman heikommin oppilaat luottivat omiin kykyihinsä toisen asteen polynomiyhtälön juuriin liittyvässä todistamistehtävässä (teht. 5) ja tilavuuteen liittyvässä mallinnustehtävässä (teht. 6).
 - Tehtävän 5 haastetta saattoi lisätä se, että yhtälössä kertoimina olivat lukujen sijaan vakiot a , b ja c .
 - Tehtävän 6' ratkaisemiseen ei ole olemassa valmista mallia.
- Heikoiten opiskelijat luottivat kykyihinsä ratkaista differentiaaliyhtälöön ja kompleksisiin juuriin liittyvät tehtävät (teht. 8 ja 9) sekä logaritmuunnokseen liittyvä mallinnustehtävä (teht. 1). Näissä tehtävissä tarvitaan sellaista matematiikkaa, johon vastaajat eivät välttämättä ole perehtyneet lukiossa.

Matemaattinen itseluottamus

Matemaattista itseluottamusta kuvaava indeksi saadaan laskemalla keskiarvo luottamusta koskevien kysymysten vastauksista (kaikki asteikolla 1-4).

Koulutusohjelmaluokka	Mat. itseluottamuksen indeksi	Keskihajonta
Opettaja (N=70)	2,94	0,43
Matemaatikko (N=66)	2,95	0,38
Soveltaja (N=154)	2,93	0,49
Kaikki (N=290)	2,93	0,45

Koulutusohjelmaluokkien välillä ei ole eroa matemaattisen itseluottamuksen indeksin suhteen.



Matemaattinen itseluottamus ja matematiikan YO-kokeen tulos

Seuraavassa tarkastelussa on otettu huomioon ainoastaan pitkän oppimäärän matematiikasta kirjoittaneet vastaajat (N =279, joista matemaattisen itseluottamuksen indeksi saatiin laskettua 262:lle).

Matemaattisen itseluottamuksen indeksi ja YO-kokeen arvosana (puoltoäänimäärä) korreloivat merkitsevästi ($p < .01$).



Matemaattinen itseluottamus ja matematiikan YO-kokeen tulos

Arvosana	N	Mat. itseluottamuksen indeksi (KA)	KH
I	1	2,05	-
A	2	2,79	0,37
B	6	2,69	0,71
C	19	2,48	0,40
M	60	2,79	0,41
E	108	2,96	0,37
L	66	3,21	0,43
Kaikki	262	2,94	0,45

Ällän kirjoittaneiden keskuudessa matemaattisen itseluottamuksen indeksi on erittäin merkitsevästi korkeampi kuin muiden vastaajien joukossa ($p < .001$).

Johtopäätöksiä

- Matemaatikko-opiskelijoilla sekä näkemys matematiikasta että näkemys matematiikan oppimisesta oli kaikkein vahvimmin prosessorientoitunut.
- Sen sijaan matematiikan soveltajaopiskelijoilla nämä näkemykset olivat kaikkein heikoimpia. Opettajaopiskelijat sijoittuvat matemaatikko- ja soveltajaopiskelijoiden väliin.
- Koulutusohjelmavalinnalla ja näkemyksellä matematiikasta ja sen oppimisesta on siis selkeä yhteys.
- Useat aiempien tutkimusten ja mm. konstruktivistisen oppimisen näkemyksen perusteella voidaan sanoa, että matematiikan opetuksessa tulisi edistää nimenomaan prosessorientaation mukaista näkemystä.



Johtopäätöksiä

- Tutkimuksen tulokset antavat viitteitä siitä, että opetuksesta välittyvään matematiikkakuvaan kannattaa kiinnittää huomiota erityisesti opetettaessa muita kuin varsinaisia matemaatikko-opiskelijoita.
- Opettajaopiskelijoille suunnatussa opetuksessa opetuksesta välittyvän matematiikkakuvan huomioonottaminen on tärkeää myös siksi, että tulevat opettajat myöhemmin tekevät omaa opetustaan koskevia ratkaisuja ja valintoja omaksumansa matematiikkakuvan pohjalta. He myös välittävät välillisesti ja suoraan omaksumaansa matematiikkakuvaa oppilailleen.
- Matemaattiseen itseluottamukseen ja koulutusohjelmavalinnan välillä ei juurikaan havaittu riippuvuutta.
- Itseluottamuksen kannalta tärkeämpi tekijä vaikuttaisi olevan opinnoissa menestyminen.



Johtopäätöksiä

- Opiskelijoiden itseluottamus oli korkea sellaisissa asioissa, joissa voi menestyä skeemaoppimisessa.
- Sen sijaan prosessioppimista vaativissa asioissa, kuten ongelmanratkaisussa, mallintamisessa ja todistamisessa, opiskelijoiden itseluottamus oli heikompaa.



Lähteet

- Schmidt, W. H., Blömeke, S. & Tatto, M. T. (2011). *Teacher education matters: a study of middle school mathematics teacher preparation in six countries*. New York: Teacher College Press.

