YDINJÄTTEEN KAPSELISIJOITUKSEN MEKAANISEN STABIILIUDEN LASKENTAMENETELMÄ

T. LAHTINEN[1], M. LYLY[2], J. RUOKOLAINEN[2], R. STENBERG[3]

[1]Teknillinen korkeakoulu, Polttomoottorilaboratorio
PL 4300, 02015 Espoo
sähköposti: tuukka.lahtinen@hut.fi

[2]CSC - Tieteellinen laskenta Oy
PL 405, 02101 Espoo
sähköposti: mikko.lyly@csc.fi, juha.ruokolainen@csc.fi

[3]Teknillinen korkeakoulu, Matematiikan laitos
PL 1100, 02015 Espoo
sähköposti: rolf.stenberg@hut.fi

TIIVISTELMÄ

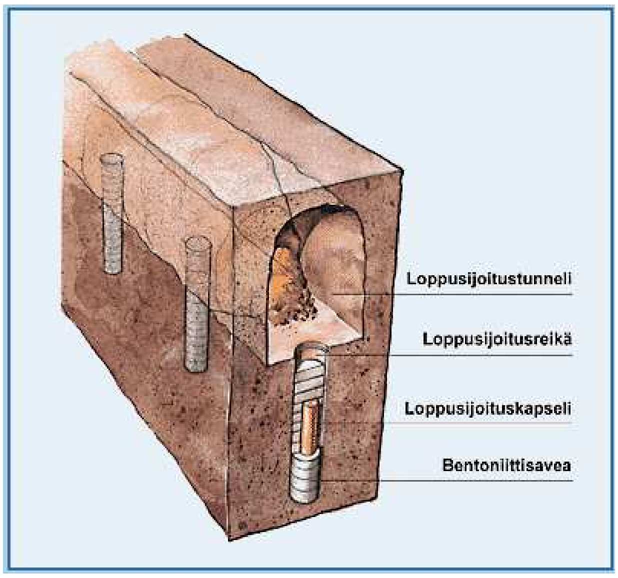
Artikkelissa esitetään laskentamenetelmä, jolla voidaan tutkia loppusijoitustilaan suljetun ydinjätekapselin mahdollista liikettä olettaen, että kapselia ympäröivän bentoniittisaven pitkäaikaiskäyttäytyminen on kuvattavissa newtonilaisen nesteen materiaalimallilla. Esitys pohjautuu vuonna 2002 TKK:n Matematiikan laitoksella kirjoitettuun diplomityöhön [1], jonka on rahoittanut Säteilyturvakeskus.

1 JOHDANTO

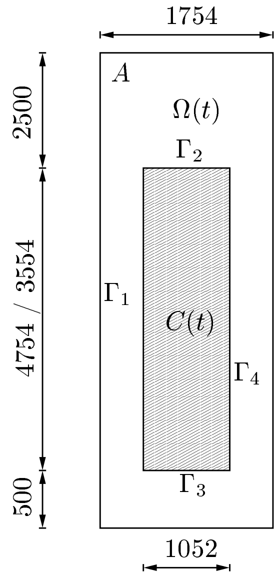
Nykyisen suunnitelman mukaan Suomessa tuotettava ydinjäte tullaan loppusijoittamaan kuvan 1 esittämällä tavalla peruskallioon noin puolen kilometrin syvyyteen louhittuihin tiloihin. Käytetyt ydinpolttoaineniput suljetaan kapseleihin, jotka eristetään kalliosta vuoraamalla sijoitusreiät kapseleiden ympäriltä bentoniitti-nimisellä savimaisella materiaalilla. Bentoniitti toimii kulkeutumiseristeenä ja suojaa kapseleita kallion mahdolliselta liikehdinnältä.

Luonnon bentoniittiesiintymiä tutkittaessa on havaittu, että raskaiden kivien alla bentoniitti lähtee viskoosin nesteen tavoin erittäin hitaasti virtaamaan [2]. On arveltu, että vastaava ilmiö saattaisi olla mahdollinen myös sijoitusreiässä — bentoniitti virtaa äärimmäisen hitaasti pois 20 tonnin painoisen kapselin alta kapselin vajotessa samalla alaspäin. Pahimmassa tapauksessa kapseli vajoaisi hyvin pitkän ajan kuluessa sijoitusreiän pohjalle, jolloin se ei ole enää bentoniittieristeessä vaan osittain vapaassa kosketuksissa kallion ja kallioraoissa virtaavan pohjaveden kanssa.

Matemaattisesti kapselin liikkeen mallintamisessa on kyse nopeusreunaehdon kautta kytkeytyvien kapselin ja bentoniitin liikeyhtälöiden muodostaman systeemin ratkaisemisesta. Oletettaessa bentoniitti newtonilaiseksi nesteeksi muodostuva systeemi on lineaarinen ja se voidaan ratkaista implisiittisesti seuraavassa luvussa kuvattavalla tavalla.



Kuva 1: Loppusijoitustila, lähde: [3]



Kuva 2: Laskentageometria

2 KAPSELIN LIIKKEEN MALLINTAMINEN ·

Tarkastellaan kuvan 2 mukaista sijoitusreiän aluetta $A \subset \mathbb{R}^3$. Merkitään $A = \Omega \cup C$, jossa $C = C(t)$ ja $\Omega = \Omega(t)$ ovat kapselin ja bentoniitin täyttämät alueet sijoitusreiässä. Yksikköulkonormaalivektori Ω:lle olkoon $\mathbf{n}$. Valitaan vielä koordinaatiston x_3-akseli symmetria-akselin suuntaiseksi ja merkitään tämän akselin suuntaista "ylöspäin" osoittavaa yksikkövektoria $\mathbf{e}_3$:lla.

Bentoniitin liikettä kuvataan tässä tarkastelussa tehtävällä

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \rho\mathbf{b} & \forall\mathbf{x} \in \Omega(t) \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 & \forall\mathbf{x} \in \Omega(t) \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \forall\mathbf{x} \in \Gamma_1 \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = V_C & \forall\mathbf{x} \in \Gamma_2(t) \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = -V_C & \forall\mathbf{x} \in \Gamma_3(t) \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 & \forall\mathbf{x} \in \Gamma_4(t) \\ \mathbf{t} - (\mathbf{t}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n} = \mathbf{0} & \forall\mathbf{x} \in \Gamma_2(t) \cup \Gamma_3(t) \cup \Gamma_4(t). \end{cases} \tag{1}$$

Edellä $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ja $p = p(\mathbf{x}, t)$ ovat nopeus- ja painekentät, ρ on bentoniitin tiheys, $\mathbf{b}$ gravitaatiokenttä, μ dynaaminen viskositeetti, V_C kapselin vajoamisnopeus ja $\mathbf{t}$ traktiovektori, $\mathbf{t} = \left[-p\mathbf{I} + \mu\left(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T\right)\right]\cdot\mathbf{n}$. Voimatasapainoyhtälö kapselille kirjoitetaan muodossa

$$F_S - M_C b = 0, \tag{2}$$

jossa F_S on bentoniitin kapseliin kohdistama pintavoima ja M_C kapselin massa. Tehtävänä on määrittää kapselin kullakin sijainnilla vajoamisnopeus V_C siten, että siitä aiheutuva virtauskenttä kohdistaa kapseliin painon $M_C b$ suuruisen pintavoiman F_S.

Implisiittistä ratkaisumenettelyä varten tehtävän (1) kuormatermi $\rho\mathbf{b}$ on sisällytettävä painegradienttiin. Merkitään $\tilde{p} := p + \rho b x_3$, $\tilde{\mathbf{u}} := \mu\mathbf{u}$ ja $\tilde{\mathbf{t}} := (-\tilde{p}\mathbf{I} + \nabla\tilde{\mathbf{u}} + \nabla\tilde{\mathbf{u}}^T)\cdot\mathbf{n}$, jolloin

(1) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{\mathbf{u}} + \nabla\tilde{p} = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Omega(t) \\ \operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}} = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega(t) \\ \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1 \\ \tilde{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{n} = \mu V_C & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_2(t) \\ \tilde{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{n} = -\mu V_C & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_3(t) \\ \tilde{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{n} = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_4(t) \\ \tilde{\mathbf{t}} - \left(\tilde{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{n}\right)\mathbf{n} = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_2(t)\cup\Gamma_3(t)\cup\Gamma_4(t) \end{cases} \tag{3}$$

tai vastaavasti operaattorinotaatiolla

$$\mathcal{S}(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{p}) = \mathcal{F}(\mu V_C). \tag{4}$$

Edellä $\mathcal{S}$ on reunaehdot sisältävä Stokesin operaattori ja $\mathcal{F}$ kuormafunktionaali. Tehtävän (3) ratkaisu $(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{p})$ on lineaarikuvaus μV_C:stä: $(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{p}) = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{F}(\mu V_C)$.

Määritellään seuraavaksi lineaarikuvaukset $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ ja $\mathcal{L}_3$:

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{t}) := -\mathbf{e}_3\cdot\int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma 4}\mathbf{t}\ \mathrm{d}\mathbf{s} \tag{5}$$

$$\mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{p}) := \left[-\tilde{p}\mathbf{1} + \left(\nabla\tilde{\mathbf{u}} + \nabla\tilde{\mathbf{u}}^T\right)\right]\cdot\mathbf{n} \tag{6}$$

$$\mathcal{L}_3(\mu V_C) := \mathcal{S}^{-1}\mathcal{F}(\mu V_C). \tag{7}$$

Näillä merkinnöillä kapseliin kohdistuva pintavoima on

$$F_S = \mathcal{L}_1(\mathbf{t}) = \mathcal{L}_1\circ\mathcal{L}_2\circ\mathcal{L}_3(\mu V_C) + \mathcal{L}_1(\rho b x_3\mathbf{n}) = \chi\mu V_C + B_C, \tag{8}$$

jossa χ on ainoastaan kapselin sijainnista riippuva skalaarinen vastuskerroin — lineaarikuvauksen $\mathcal{L}_1\circ\mathcal{L}_2\circ\mathcal{L}_3$ "esitysmatriisi" — ja B_C kapseliin kohdistuva hyrdrostaattinen noste. Kapselin voimatasapainoyhtälö (2) tulee nyt muotoon

$$\chi\mu V_C + B_C - M_C b = 0 \tag{9}$$

ja liikkeen määrittämiseksi voidaan soveltaa implisiittistä menetelmää: määritetään sijaintikohtainen vastuskerroin χ ratkaisemalla virtaustehtävä (3) esimerkiksi nopeusreunaehdolla $\mu V_C = 1$, jonka jälkeen todellinen vajoamisnopeus kapselin kyseisellä sijainnilla on yhtälön (9) nojalla

$$V_C = \frac{M_C b - B_C}{\mu\chi}.$$

Vastuskerroin χ sisältää siis informaation, joka yhdessä bentoniitin materiaaliparametrien ρ ja μ kanssa määrää kapselin liikkeen.

3 TEHTÄVÄN DISKRETOINTI

Suureen $\mathcal{L}_3(1) = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{F}(1)$ määrittämiseksi tehtävä (3) joudutaan ratkaisemaan numeerisesti. Tässä artikkelissa numeeriseen laskentaan käytetään Elmer-ohjelmistoa [4], jossa jatkuvan tehtävän diskretointi perustuu elementtimenetelmään. Tehtävän (3) tapauksessa diskretointi johtaa muotoa

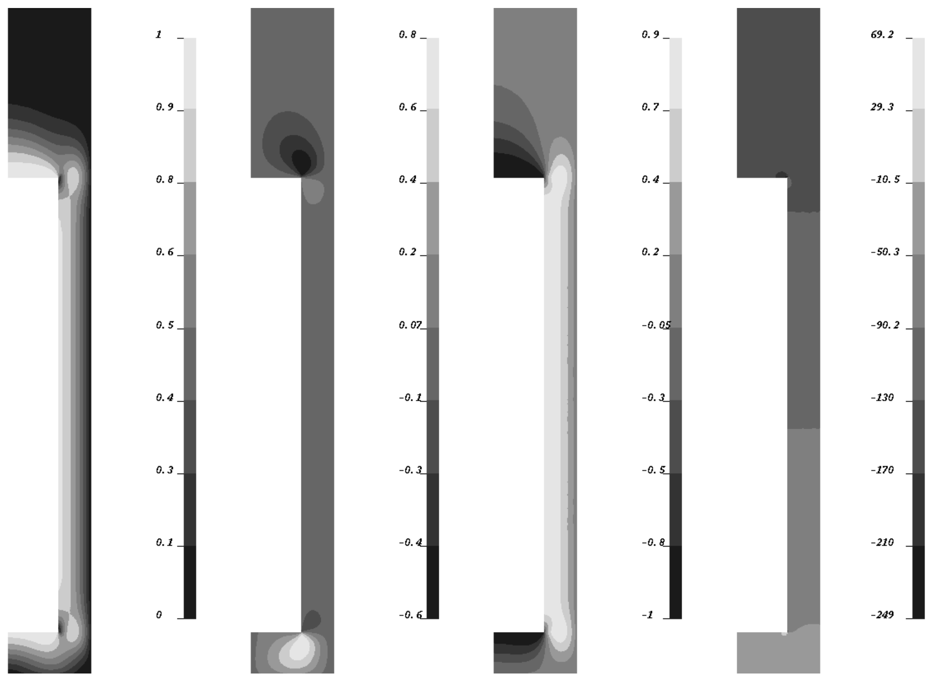
$$\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{P}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{G}_1\\ \mathbf{G}_2\end{pmatrix} \tag{10}$$

olevaan lineaariseen yhtälöryhmään, missä vektorit **U** ja **P** sisältävät nopeus- ja painevapausasteet.

Sovellettaessa elementtimenetelmää Stokesin tehtävälle on numeerisen stabiiliuden kannalta kriittistä nk. Babuškan – Brezzin (BB) ehdon toteutuminen. Numeerinen ratkaisu on matemaattisessa mielessä stabiili, jos nopeuden ja paineen muotofunktiokannat valitaan siten, että BB-ehto on voimassa. Elmer-ohjelmistossa BB-ehto voidaan toteuttaa valitsemalla ratkaisija käyttämään kuplastabilointitekniikkaa. Tällöin nopeuden lineaarista muotofunktiokantaa täydennetään viidennen asteen kuplafunktioilla, jotka pyritään muotoilemaan residuaalivapaiksi [5].

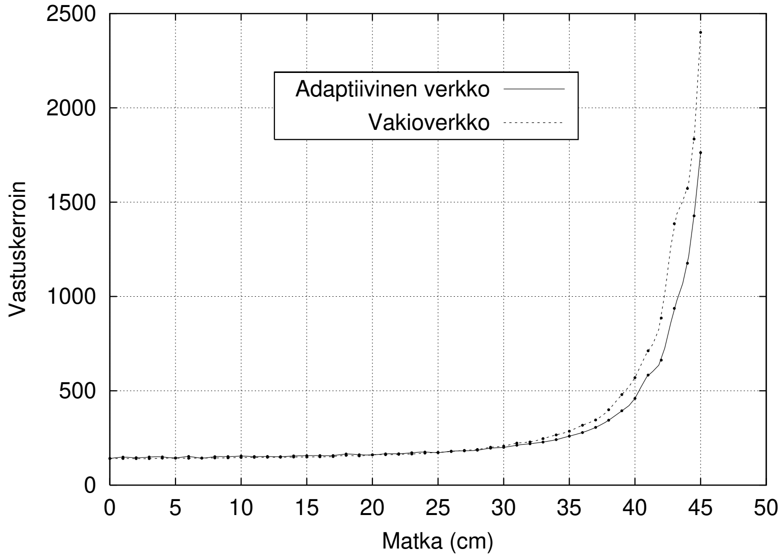
Numeerisessa laskennassa hyödynnetään lisäksi adaptiivista laskentaverkkoa, joka perustuu a posteriori -virheanalyysistä saatavan lokaalin virheindikaattorin käyttöön. Ideana on tällöin jakaa sopivassa normissa mitattu numeerisen ratkaisun virhe tasaisesti koko laskenta-alueelle. Kapselin päätylaippojen ja vaipan väliseen rajapintaan muodostuvien kulmasingulariteettien vuoksi adaptiivinen verkko (h-adaptiivisuus) on tässä yhteydessä laskentataloudellisesti varsin tehokas.

4 NUMEERISIA TULOKSIA

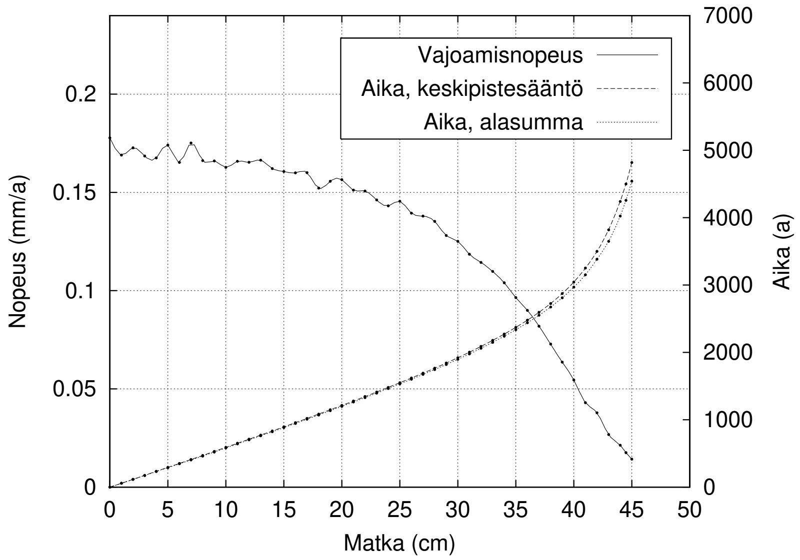


(a) (b) (c) (d)

Kuva 3: Tehtävän (3) ratkaisu reunaehdolla $\mu V_C = 1$. Suureet: nopeuden itseistarvo (a), nopeuden vaakakomponentti (b), nopeuden pystykomponentti (c) ja paine (d).



Kuva 4: Vakioverkoilla ja adaptiivisilla verkoilla laskettuja vastuskertoimen χ arvoja kapselin vajoman matkan x funktiona, kun $x \in [0, 45]$. Arvo $x = 0$ vastaa alkutilaa, jolloin kapselin pohja on 50 cm:n etäisyydellä sijoitusreiäin pohjasta.



Kuva 5: Esimerkki kapselin mahdollisesta liikkeestä: vajoamisnopeus ja -aika sijainnin x funktiona lähteen [6] mukaisilla materiaaliparametrien arvoilla $\rho = 2000\,\mathrm{kg/m^3}$ ja $\mu = 2 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Pa\,s}$. Vastuskertoimina on käytetty kuvan 4 mukaisia adaptiivisella verkolla laskettuja arvoja. (1 a = 1 vuosi)

5 JOHTOPÄÄTÖKSET

Edellä esitettiin laskentamentetelmä sekä numeeriset tulokset, joiden perusteella voidaan halutuilla materiaaliparametrien arvoilla arvioida ydinjätekapselin mahdollista vajoamista loppusijoitustilassa. Kapselisijoituksen kvantitatiivisen stabiiliusanalyysin tekemiseksi tarvittaisiin lisätietoa bentoniitin pitkäaikaiskäyttäytymisestä.

VIITTEET

[1] Tuukka Lahtinen. *Ydinjätteen kapselisijoituksen mekaanisen stabiiliuden laskentamenetelmä*. Diplomityö, Teknillinen korkeakoulu, Teknillisen fysiikan ja matematiikan osasto, 2002. http://www.hut.fi/u/tlahtine/dt/

[2] Paula Keto. *Bentonite Deposits as a Natural Analogue to Long-Term Barriers in a Final Repository of Nuclear Waste*. Helsinki University of Technology, Laboratory of Engineering Geology and Geophysics, TKK-IGE-A-24, 1999.

[3] Säteilyturvakeskus. *Käytetyn ydinpolttoaineen loppusijoitus Suomessa*. http://www.stuk.fi/ydinjatteet/loppusijoitus.html

[4] CSC - Tieteellinen laskenta Oy. Elmer-ohjelmiston www-sivu. http://www.csc.fi/elmer

[5] CSC - Tieteellinen laskenta Oy. *Finite element techniques of Elmer Solver*. http://www.csc.fi/elmer/elmersolve/fem.html

[6] Antti Lempinen. *A Simple Estimate for Sinking Speed of a High Level Nuclear Waste Canister in a Bentonite Buffer*. VII Suomen mekaniikkapäivät Tampereella 25.-26.5.2000, Juhani Koski ja Simo Virtanen (toim.), ISBN 952-15-0414-5, ss. 581-587, 2000.