JÄLKIKÄSITTELYMENETELMÄ MITC-LAATTAELEMENTEILLE

M. LYLY[1], J. NIIRANEN[2], R. STENBERG[2]

[1]CSC — Scientific Computing Ltd.
Box 405, FIN-02101 Espoo
mlyly@csc.fi

[2]Institute of Mathematics
Helsinki University of Technology
Box 1100, FIN-02015 HUT, FINLAND
jarkko.niiranen@hut.fi, rolf.stenberg@hut.fi

TIIVISTELMÄ

Stabiloiduille MITC-tyyppisesti redusoiduille Reissner—Mindlin-laattaelementeille esitetään jälkikäsittelymenetelmä, jonka avulla laatan taipuma saadaan kertaluokkaa alkuperäistä tarkemmaksi. Jälkikäsittely suoritetaan elementtikohtaisesti, joten se on laskennallisesti kevyt toimenpide.

1 JOHDANTO

MITC-tyyppisesti redusoidut Reissner—Mindlin-laattaelementit ovat osoittautuneet optimaalisesti suppeneviksi ja stabiileiksi eli lukkiutumattomiksi elementeiksi [2]. Vastaaviin tuloksiin on päästy myös stabiloiduilla elementtimenetelmillä [4].

Yhdistämällä MITC-tyyppinen reduktio ja stabilointi myös lineaariset elementit on saatu optimaalisesti suppeneviksi ja stabiileiksi [2], [8], [6]. Lisäksi näissä yhdistetyissä menetelmissä taipumalle ja kiertymäkomponenteille voidaan käyttää samanasteisia, itse asiassa täysin identtisiä, yksinkertaisia interpolointipolynomeja. Myös iteratiivisten yhtälönratkaisumenetelmien näkökulmasta stabiloituja menetelmiä voidaan pitää klassisia menetelmiä parempina, koska stabiloinnin ansiosta jäykkyysmatriisin häiriöherkkyys laskee [9].

Tässä artikkelissa esitetään lyhyesti Reissner—Mindlin-laattamallille (luku 2) edellä mainittu stabiloitu MITC-tyyppisesti redusoitu elementtimenetelmä ja sen virhearviot (luku 3). Tälle menetelmälle esitetään taipuma-approksimaation tarkkuutta parantava jälkikäsittelymenetelmä sekä sitä vastaavat virhearviot (luku 4) ja numeeriset tulokset (luku 5).

2 REISSNER—MINDLIN-LAATTAMALLI

2.1 Variaatioformulaatio

Tarkastellaan lineaarisen, elastisen ja isotrooppisen laatan taivutusta. Laatan liukukerroin on G ja Poissonin vakio ν. Laatan keskipinta $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ennen muodonmuutosta ja laatan paksuus $t << \mathrm{diam}(\Omega)$.

Yksinkertaistaen tehtävää oletetaan, että Ω on konveksi monikulmio ja että laatan reuna $\partial\Omega = \Gamma$ on jäykästi tuettu. Lisäksi oletetaan, että laatan paksuus t on vakio.

Merkinnällä $(\cdot,\cdot)_D$ tarkoitetaan $L^2(D)^d$-sisätuloa, missä $d = 1, 2$ tai 2×2. Lisäksi käytetään merkintää $(\cdot,\cdot)_\Omega = (\cdot,\cdot)$.

Näillä merkinnöillä ja oletuksilla jäykästi tuetun Reissner—Mindlin-laatan variaatioformulaatio voidaan esittää seuraavassa muodossa [1], [10], [5]:

Varaatiotehtävä 2.1. *Etsi taipuma* $w \in W = \{v \in H^1(\Omega) \mid v_{|\Gamma} = 0\}$ *ja kiertymä* $\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{\eta} \in H^1(\Omega)^2 \mid \boldsymbol{\eta}_{|\Gamma} = \boldsymbol{0}\}$ *siten, että*

$$\mathcal{E}(w, \boldsymbol{\beta}; v, \boldsymbol{\eta}) = (f, v) \;\; \forall (v, \boldsymbol{\eta}) \in W \times \boldsymbol{V}, \tag{1}$$

missä $f \in H^{-1}(\Omega)$ *on laatan keskipintaa vastaan kohtisuorassa oleva kuormitus. Bilineaarimuoto*

$$\mathcal{E}(z, \boldsymbol{\phi}; v, \boldsymbol{\eta}) = Gt^3 a(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\eta}) + G\kappa t(\nabla z - \boldsymbol{\phi}, \nabla v - \boldsymbol{\eta}), \tag{2}$$

missä $\kappa > 0$ *on leikkauskorjauskerroin, ja taivutusenergia*

$$a(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{6}\{(\varepsilon(\boldsymbol{\phi}), \varepsilon(\boldsymbol{\eta})) + \frac{\nu}{1-\nu}(\operatorname{div} \boldsymbol{\phi}, \operatorname{div} \boldsymbol{\eta})\}. \tag{3}$$

Lineaarinen venymätensori

$$\varepsilon(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{\eta} + (\nabla \boldsymbol{\eta})^T), \tag{4}$$

ja vektoriin kohdistuva divergenssioperaattori määritellään yhtälöllä

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\eta} = \frac{\partial \eta_x}{\partial x} + \frac{\partial \eta_y}{\partial y}. \tag{5}$$

Jos oletetaan, että $f = Gt^3 g$, missä $g \in H^{-1}(\Omega)$ on riippumaton paksuudesta t, tehtävällä 2.1 on ei-triviaali ratkaisu rajalla $t \to 0$ (Kirchhoff—Love-ratkaisu) [10], [1, Theorem 3.1, p. 300].

Lisäksi voidaan olettaa, että $\kappa = 1$, koska tarkasteltavassa stabiloidussa elementtimenetelmässä leikkausenergiaa modifioidaan siten, että leikkauskertoimen arvon valitseminen jää toisarvoiseksi kysymykseksi.

Näillä oletuksilla variaatiotehtävä 2.1 voidaan esittää sekamuodossa ottamalla (skaalattu) leikkausvoima

$$\boldsymbol{q} = t^{-2}(\nabla w - \boldsymbol{\beta}) \tag{6}$$

uudeksi muuttujaksi avaruudessa $\boldsymbol{Q} = L^2(\Omega)^2$ [1], [10], [5]:

Varaatiotehtävä 2.2. *Etsi* $(w, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{q}) \in W \times \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{Q}$ *siten, että*

$$\mathcal{M}(w, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{q}; v, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{r}) = (g, v) \;\; \forall (v, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{r}) \in W \times \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{Q}, \tag{7}$$

missä bilineaarimuoto

$$\mathcal{M}(z, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{s}; v, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{r}) = a(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\eta}) + (\boldsymbol{s}, \nabla v - \boldsymbol{\eta}) + (\nabla z - \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{r}) - t^2(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r}). \tag{8}$$

2.2 Differentiaaliyhtälöt ja reunaehdot

Variaatiotehtäviä vastaavat seuraavat differentiaaliyhtälöt ja reunaehdot [5]: Skaalattua heikkoa muotoa 2.1 vastaavat differentiaaliyhtälöt ovat

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{\beta} + t^{-2}(\nabla w - \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0} \ \ \Omega\text{:ssa}, \tag{9}$$

$$-t^{-2}(\Delta w - \operatorname{div} \boldsymbol{\beta}) = g \ \ \Omega\text{:ssa}. \tag{10}$$

Vektoriin kohdistuva differentiaalioperaattori $\boldsymbol{L}$ määritellään yhtälöllä

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{div}\, \boldsymbol{m}(\boldsymbol{\eta}), \tag{11}$$

missä momenttitensori

$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{6}\{\varepsilon(\boldsymbol{\eta}) + \frac{\nu}{1-\nu}\mathbf{div}\, \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{I}\}, \tag{12}$$

ja toisen asteen tensoriin kohdistuva divergenssioperaattori määritellään yhtälöllä

$$\mathbf{div}\, \boldsymbol{u} = (\frac{\partial u_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{xy}}{\partial y}, \frac{\partial u_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{yy}}{\partial y}). \tag{13}$$

Tehtävää 2.2 vastaavat differentiaaliyhtälöt ovat

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{q} = \mathbf{0} \ \ \Omega\text{:ssa}, \tag{14}$$

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{q} = g \ \ \Omega\text{:ssa}, \tag{15}$$

$$\nabla w - \boldsymbol{\beta} - t^2\boldsymbol{q} = \mathbf{0} \ \ \Omega\text{:ssa}. \tag{16}$$

Molempia tehtäviä vastaavat reunaehdot ovat

$$w = 0 \ \ \Gamma\text{:lla}, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} \ \ \Gamma\text{:lla}. \tag{18}$$

3 ELEMENTTIMENETELMÄ

3.1 Perusoletukset ja merkinnät

Aluksi tehdään joitakin tavallisia elementtimenetelmän diskretointia koskevia oletuksia, joissa kolmion tilalla voidaan yleisessä tapauksessa puhua elementistä, esimerkiksi nelikulmiosta [3]:

Äärellinen joukko $\mathcal{C}_h$ on joukon $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ osiointi suljetuiksi kolmioiksi $K \subset \bar{\Omega}$ eli $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{C}_h} K$, missä verkontiheys $h = \max_{K \in \mathcal{C}_h} h_K$ ja elementtikoko $h_K = \operatorname{diam}(K)$.

Kolmioinnin oletetaan olevan säännöllinen: Oletetaan, että on olemassa vakio $c > 0$ siten, että $h_K/\rho_K < c \ \ \forall K \in \mathcal{C}_h$, missä ρ_K on kolmioon K sisältyvien ympyröiden halkaisijoiden yli otettu supremum. Lisäksi oletetaan, että verkontiheys h lähenee nollaa.

Lisäksi kolmioiden oletetaan olevan yhteensopivia: Jos $K_1, K_2 \in \mathcal{C}_h$, niin $K_1 \cap K_2$ on joko tyhjä joukko, kolmioiden K_1 ja K_2 yhteinen reuna tai kolmioiden K_1 ja K_2 yhteinen kulma.

Oletetaan vielä, että $\forall K \in \mathcal{C}_h$ kolmiot K ja $\hat{K}$ ovat affiini-ekvivalentit: $\forall K \in \mathcal{C}_h$ on olemassa yksikäsitteinen bijektiivinen affiinikuvaus $\boldsymbol{F}_K : \hat{K} \to K$, missä $\hat{K}$ on referenssikolmio, jonka kulma $\hat{a} = (\xi, \eta) = (0,0), (1,0)$ tai $(0,1)$.

Affiinikuvauksen avulla määritellään lokaali polynomiavaruus

$$P_k(K) = \{p = \hat{p} \circ \boldsymbol{F}_K^{-1} \ \mid \ \hat{p} \in P_k(\hat{K})\}, \tag{19}$$

missä $P_k(\hat{K})$ on referenssikolmiolla $\hat{K}$ kokonaisasteeltaan korkeintaan astetta k olevien polynomien muodostama avaruus.

Virhearvioissa esiintyville positiivisille vakioille, jotka ovat riippumattomia paksuudesta t ja verkontiheydestä h, käytetään merkintää C, joko alaindeksillä tai ilman.

3.2 Elementtiavaruudet

Elementtialiavaruudet $W_h \subset W$, $\boldsymbol{V}_h \subset \boldsymbol{V}$ ja $\boldsymbol{Q}_h \subset \boldsymbol{Q}$, taipumalle, kiertymälle ja leikkausvoimalle, määritellään kokonaislukuasteelle $k \geq 1$ seuraavasti [9]:

$$W_h = \{v \in W \mid v_{|K} \in W_k(K) \ \ \forall K \in \mathcal{C}_h\}, \tag{20}$$
$$\boldsymbol{V}_h = \{\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{V} \mid \boldsymbol{\eta}_{|K} \in \boldsymbol{V}_k(K) \ \ \forall K \in \mathcal{C}_h\}, \tag{21}$$
$$\boldsymbol{Q}_h = \{\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{Q} \mid \boldsymbol{r}_{|K} \in \boldsymbol{Q}_k(K) \ \ \forall K \in \mathcal{C}_h\}. \tag{22}$$

Taipuma ja kiertymäkomponentit interpoloidaan samoilla muotofunktioilla, leikkausvoima MITC-interpolointitekniikalla:

$$W_k(K) = R_k(K) \tag{23}$$
$$\boldsymbol{V}_k(K) = R_k(K)^2 \tag{24}$$
$$\boldsymbol{Q}_k(K) = \{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{J}_K^{-T}\hat{\boldsymbol{r}} \circ \boldsymbol{F}_K^{-1} \mid \hat{\boldsymbol{r}} \in \boldsymbol{Q}_k(\hat{K})\}, \tag{25}$$

missä $\boldsymbol{J}_K : \hat{\mathbb{R}}^2 \to \mathbb{R}^2$ on edellä määritellyn affiinikuvauksen $\boldsymbol{F}_K : \hat{K} \to K$ Jacobin kuvaus. Lokaaliset polynomiavaruudet $R_k(K)$ ja $\boldsymbol{Q}_k(\hat{K})$ määritellään erikseen eri elementtityypeille.

3.3 Elementit

Variaatiotehtävän 2.2 approksimatiiviseen ratkaisemiseen käytetään stabiloitua MITC-redusoitua elementtimenetelmää [9]:

Menetelmä 3.1. *Etsi variaatiotehtävän 2.2 ratkaisulle elementtiapproksimaatio* $(w_h, \boldsymbol{\beta}_h) \in W_h \times \boldsymbol{V}_h$ *siten, että*

$$\mathcal{B}_h(w_h, \boldsymbol{\beta}_h; v, \boldsymbol{\eta}) = (g, v) \ \ \forall (v, \boldsymbol{\eta}) \in W_h \times \boldsymbol{V}_h, \tag{26}$$

missä bilineaarimuoto

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_h(z, \boldsymbol{\phi}; v, \boldsymbol{\eta}) &= a(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\eta}) - \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \alpha_K h_K^2 (\boldsymbol{L\phi}, \boldsymbol{L\eta})_K \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{C}_h} (t^2 + \alpha_K h_K^2)^{-1} (\boldsymbol{R}_K(\nabla z - \boldsymbol{\phi}) - \alpha_K h_K^2 \boldsymbol{L\phi}, \boldsymbol{R}_K(\nabla v - \boldsymbol{\eta}) - \alpha_K h_K^2 \boldsymbol{L\eta})_K.\end{aligned} \tag{27}$$

Reduktio-operaattori $\boldsymbol{R}_K$ *määritellään erikseen eri elementtityypeille. Menetelmän formuloinnista eliminoitu konsistentti approksimatiivinen leikkausvoima*

$$\boldsymbol{q}_{h|K} = (t^2 + \alpha_K h_K^2)^{-1} (\boldsymbol{R}_K(\nabla w_h - \boldsymbol{\beta}_h) - \alpha_K h_K^2 \boldsymbol{L\beta}_h)_{|K} \ \ \forall K \in \mathcal{C}_h. \tag{28}$$

Menetelmässä 3.1 voidaan käyttää eri elementtejä valitsemalla lokaalit polynomiavaruudet ja reduktio-operaattori eri tavoin. Stabiloitu MITC-redusoitu kolmioelementti määritellään seuraavilla valinnoilla [9]:

Elementti 3.1. *Kolmiolle* $K \in \mathcal{C}_h$ *lokaalit polynomiavaruudet valitaan siten, että* $R_k(K) = P_k(K)$ *ja (kierretty Raviart—Thomas-avaruus)*

$$\boldsymbol{Q}_k(\hat{K}) = P_{k-1}(\hat{K})^2 \oplus (\eta, -\xi) P_{k-1}^{hom}(\hat{K}), \tag{29}$$

missä $P_{k-1}^{hom}(\hat{K})$ *on homogeenisten astetta* $k-1$ *olevien polynomien avaruus referenssikolmiolla* $\hat{K}$. *Reduktio-operaattori* $\boldsymbol{R}_K$ *määritellään ehdoilla* $\boldsymbol{R}_K\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{J}_K^{-T}\boldsymbol{R}_{\hat{K}}\boldsymbol{J}_K^T\boldsymbol{\eta}$,

$$\int_{\hat{E}}[(\boldsymbol{R}_{\hat{K}}\hat{\boldsymbol{\eta}} - \hat{\boldsymbol{\eta}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}]\hat{p}\,\mathrm{d}\sigma = 0 \;\; \forall \hat{p} \in P_{k-1}(\hat{E}) \;\; \forall \hat{E} \subset \partial\hat{K}, \tag{30}$$

$$\int_{\hat{K}}(\boldsymbol{R}_{\hat{K}}\hat{\boldsymbol{\eta}} - \hat{\boldsymbol{\eta}}) \cdot \hat{\boldsymbol{p}}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = 0 \;\; \forall \hat{\boldsymbol{p}} \in P_{k-2}(\hat{K})^2, \tag{31}$$

joissa σ *on referenssikolmion reunan* $\hat{E}$ *koordinaatti ja* $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ *reunan* $\hat{E}$ *yksikkötangentti.*

Huomautus 3.1. Nelikulmiolle lokaalit polynomiavaruudet ja reduktio-operaattori voidaan valita usealla eri tavalla [9].

3.4 Virhearviot

Leikkausvoiman virhearvio esitetään myös seuraavassa verkontiheydestä riippuvassa normissa:

Määritelmä 3.1. Jos $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{Q}$, niin

$$\|\boldsymbol{r}\|_{-1,h} = \{\sum_{K \in \mathcal{C}_h} h_K^2 \|\boldsymbol{r}\|_{0,K}^2\}^{1/2}. \tag{32}$$

Elementin 3.1 virhearvioissa esiintyy vakio, joka on peräisin menetelmän stabiiliuden todistamiseen käytettävästä käänteisarviosta [3]:

Lemma 3.1. *On olemassa vakio* $C_I > 0$ *siten, että*

$$C_I h_K^2 \|\boldsymbol{L\eta}\|_{0,K}^2 \leq a_K(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) \;\; \forall \boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{V}_k(K), \tag{33}$$

missä $a_K(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})$ *vastaa yhtälön* (3) *mukaista määrittelyä sisätulolla* $(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_K$.

Jotta virhearvioissa voidaan eritellä eri virhetermit, käytetään seuraavia merkintöjä: Sisäosan verkontiheys $h_i = \max_{K \subset \Omega_i} h_K$ ja reunaosan verkontiheys $h_b = \max_{K \not\subset \Omega_i} h_K$, missä $\Omega_i \subset\subset \Omega$. Merkinnällä $\subset\subset$ tarkoitetaan kompaktia upotusta.

Seuraavien virhearvioiden perusteella elementti 3.1 suppenee optimaalisesti [9]:

Lause 3.1. *Olkoon* Ω *konveksi monikulmio ja* $0 < \alpha < \alpha_K < C_I \;\; \forall K \in \mathcal{C}_h$. *Jos menetelmässä 3.1 käytetään elementtiä 3.1, niin*

$$\begin{aligned}\|w - w_h\|_1 + \|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_h\|_1 + t\|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_h\|_0 + \|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_h\|_{-1,h} \leq & C\{h_i^k(\|g\|_{k-2} + t\|g\|_{k-1}) \\ & + h_b(\|g\|_{-1} + t\|g\|_0)\}.\end{aligned} \tag{34}$$

Lisäksi, jos $k \geq 2$, *niin*

$$\|w - w_h\|_0 + \|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_h\|_0 \leq Ch\{h_i^k(\|g\|_{k-2} + t\|g\|_{k-1}) + h_b(\|g\|_{-1} + t\|g\|_0)\}. \tag{35}$$

Seuraavissa virhearvioissa esiintyy interpolaatio-operaattori, jonka interpolointi-ominaisuudet ovat optimaaliset [9]:

Määritelmä 3.2. Interpolaatio-operaattori $I_h : H_0^1(\Omega) \to W_h$ määritellään ehdoilla

$$((v - I_K v) \circ \boldsymbol{F}_K)(\hat{a}) = 0 \;\; \forall \hat{a} \subset \hat{K}, \tag{36}$$

$$\int_{\hat{E}} ((v - I_K v) \circ \boldsymbol{F}_K)\hat{p}\,\mathrm{d}\sigma = 0 \;\; \forall \hat{p} \in P_{k-2}(\hat{E}) \;\; \forall \hat{E} \subset \partial \hat{K}, \tag{37}$$

$$\int_{\hat{K}} ((v - I_K v) \circ \boldsymbol{F}_K)\hat{p}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = 0 \;\; \forall \hat{p} \in P_{k-3}(\hat{K}), \tag{38}$$

joiden on toteuduttava lokaalilla operaattorilla $I_K = I_{h|K} \;\; \forall K \in \mathcal{C}_h$.

Seuraavassa luvussa esiteltävässä taipuman jälkikäsittelymenetelmässä alkuperäisen ja jälkikäsitellyn elementtiapproksimaation välille asetetaan yhtälöä (36) vastaava kulmasolmuja koskeva ehto. Näin voidaan käyttää hyväksi seuraavia superkonvergenssituloksia [9], [7]:

Lause 3.2. *Olkoon Ω konveksi monikulmio ja $0 < \alpha < \alpha_K < C_I \;\; \forall K \in \mathcal{C}_h$. Jos menetelmässä 3.1 käytetään elementtiä 3.1, niin*

$$\begin{aligned}\{\sum_{K \in \mathcal{C}_h} (t^2 + \alpha_K h_K^2)^{-1} \|\nabla(I_h w - w_h)\|_{0,K}^2\}^{1/2} \leq & C\{h_i^k(\|g\|_{k-2} + t\|g\|_{k-1}) \\ & + h_b(\|g\|_{-1} + t\|g\|_0)\}.\end{aligned} \tag{39}$$

Lause 3.3. *Olkoon Ω konveksi monikulmio, $0 < \alpha < \alpha_K < C_I \;\; \forall K \in \mathcal{C}_h$ ja $t \leq Ch$ (ns. numeerisesti ohut laatta). Jos menetelmässä 3.1 käytetään elementtiä 3.1 ja $k \geq 2$, niin*

$$\|I_h w - w_h\|_0 \leq Ch^2\{h_i^k(\|g\|_{k-2} + t\|g\|_{k-1}) + h_b(\|g\|_{-1} + t\|g\|_0)\}. \tag{40}$$

Huomautus 3.2. Lauseiden 3.1, 3.2 ja 3.3 virhearviot pätevät myös vastaaville stabiloiduille MITC-tyyppisesti redusoiduille nelikulmioelementeille [9], [7].

4 JÄLKIKÄSITTELY

4.1 Perusidea

Jälkikäsittelyn ideana on käyttää hyväksi taipuman alkuperäisen elementtiapproksimaation superkonvergenssituloksia ja etsiä taipumalle elementtiapproksimaatio alkuperäistä avaruutta astetta laajemmasta avaruudesta. Taipuman jälkikäsitellyn elementtiapproksimaation virhearvioilla osoitetaan, että jälkikäsittelymenetelmä antaa alkuperäistä astetta tarkemman approksimaation.

Jälkikäsittelymenetelmä perustuu leikkausvoimalle asetetun yhtälön (6) heikkoon muotoon. Jälkikäsittelyehto asetetaan erikseen jokaiselle elementille $K \in \mathcal{C}_h$ tietyn testifunktioavaruuden T_K suhteen:

$$(\nabla w, \nabla v)_K = (\boldsymbol{\beta}, \nabla v)_K + t^2(\boldsymbol{q}, \nabla v)_K \;\; \forall v \in T_K. \tag{41}$$

Lisäksi asetetaan kulmasolmuarvoja koskeva sidosehto, jonka avulla jälkikäsitelty elementtiapproksimaatio sidotaan alkuperäiseen elementtiapproksimaatioon ja asetetun jälkikäsittelytehtävän ratkaisusta saadaan yksikäsitteinen.

4.2 Jälkikäsittelymenetelmä

Olkoot $w_h \in W_h$, $\boldsymbol{\beta}_h \in \boldsymbol{V}_h$ ja $\boldsymbol{q}_h \in \boldsymbol{Q}_h$ taipuman, kiertymän ja leikkausvoiman elementtiapproksimaatiot, jotka on saatu käyttämällä menetelmässä 3.1 elementtiä 3.1. Yhtälöiden (20) ja (23) sekä elementtimääritelmän 3.1 perusteella taipuman alkuperäinen elementtiapproksimaatio $w_{h|K} \in W_k(K) = P_k(K) \;\; \forall K \in \mathcal{C}_h$. Taipuman jälkikäsitelty elementtiapproksimaatio $w_h^* \in W_h^* \subset W$ etsitään siten, että $w_{h|K}^* \in W_{k+1}(K) = P_{k+1}(K)$.

Jälkikäsittelymenetelmä 4.1. *Olkoon $\mathcal{J}_h$ kolmioinnin $\mathcal{C}_h$ kaikkien kulmien muodostama joukko. Kaikilla kolmioilla $K \in \mathcal{C}_h$ etsi lokaali taipuman jälkikäsitelty elementtiapproksimaatio $w^*_{h|K} \in P_{k+1}(K)$ siten, että*

$$
\begin{aligned}
(\nabla w_h^*, \nabla v)_K &= (\boldsymbol{\beta}_h, \nabla v)_K + t^2(\boldsymbol{q}_h, \nabla v)_K \quad \forall v \in \tilde{W}_{k+1}(K), && (42)\\
w_h^*(a) &= w_h(a) \quad \forall a \in \mathcal{J}_h \cap K, && (43)
\end{aligned}
$$

missä $\tilde{W}_{k+1}(K) = \{v \in P_{k+1}(K) \mid v(a) = 0 \;\; \forall a \in \mathcal{J}_h \cap K\}$.

Kirjoittamalla lokaali jälkikäsitelty elementtiapproksimaatio muodossa $w^*_{h|K} = w_{h|K} + \tilde{w}_{h|K}$ päädytään seuraavaan ekvivalenttiin muotoon: Etsi $\tilde{w}_{h|K} \in \tilde{W}_{k+1}(K)$ siten, että

$$
(\nabla \tilde{w}_h, \nabla v)_K = (\boldsymbol{\beta}_h - \nabla w_h, \nabla v)_K + t^2(\boldsymbol{q}_h, \nabla v)_K \quad \forall v \in \tilde{W}_{k+1}(K). \tag{44}
$$

Huomautus 4.1. Jälkikäsittelymenetelmällä 4.1 saatava elementtiapproksimaatio ei välttämättä ole jatkuva yli elementtirajojen. Jos ratkaisusta halutaan saada jatkuva, voidaan asettaa täydentävä ehto, jossa käytetään yhtälön (6) heikkoa muotoa jokaiselle reunalle $E \subset \partial K$ tietyn testifunktioavaruuden T_E suhteen:

$$
\langle \nabla w \cdot \boldsymbol{\tau}, \nabla v \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle_E = \langle \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\tau}, \nabla v \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle_E + t^2 \langle \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\tau}, \nabla v \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle_E \quad \forall v \in T_E, \tag{45}
$$

missä $\boldsymbol{\tau}$ on reunan E yksikkötangentti ja merkintä $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ tarkoittaa $L^2(E)$-sisätuloa. Tällöin avaruus $\tilde{W}_{k+1}(K)$ korvataan pienemmällä avaruudella [7].

4.3 Virhearviot

Seuraavasta virhearviosta nähdään, miten taipuman jälkikäsitellyn elementtiapproksimaation lokaali virhe riippuu alkuperäisestä elementtiapproksimaatiosta ja laatan paksuudesta [7]:

Lause 4.1. *Olkoon Ω konveksi monikulmio ja $0 < \alpha < \alpha_K < C_I \;\; \forall K \in \mathcal{C}_h$. Jos menetelmässä 3.1 käytetään elementtiä 3.1 ja jälkikäsittelymenetelmää 4.1, niin*

$$
\begin{aligned}
\|w_h^* - w\|_{1,K} \le& \|I_h w - w_h\|_{1,K} + \|I_h^* w - w\|_{1,K} \\
&+ C\{\|\nabla(I_h w - w_h)\|_{0,K} + \|\nabla(w - I_h^* w)\|_{0,K} \\
&+ \|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_h\|_{0,K} + t^2 \|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_h\|_{0,K}\},
\end{aligned} \tag{46}
$$

$$
\begin{aligned}
\|w_h^* - w\|_{0,K} \le& \|I_h w - w_h\|_{0,K} + \|I_h^* w - w\|_{0,K} \\
&+ C h_K\{\|\nabla(I_h w - w_h)\|_{0,K} + \|\nabla(w - I_h^* w)\|_{0,K} \\
&+ \|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_h\|_{0,K} + t^2 \|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_h\|_{0,K}\},
\end{aligned} \tag{47}
$$

missä $I_h^* : H_0^1(\Omega) \to W_h^* = \{v \in W \mid v_{|K} \in W_{k+1}(K) \;\; \forall K \in \mathcal{C}_h\}$ noudattaa määritelmää 3.2, kun asteen k tilalla on aste $k+1$.

Virhearvion 3.1 sekä superkonvergenssitulosten 3.2 ja 3.3 avulla lauseesta 4.1 seuraa, että jälkikäsitellyn elementtiapproksimaation virhearvion tavoiteltu verkontiheyden potenssi saavutetaan numeerisesti ohuilla laatoilla [7]:

Lause 4.2. *Olkoon Ω konveksi monikulmio, $0 < \alpha < \alpha_K < C_I$ ja $t \le Ch$. Jos menetelmässä 3.1 käytetään elementtiä 3.1 ja jälkikäsittelymenetelmää 4.1 sekä $k \ge 2$, niin*

$$
\{\sum_{K \in \mathcal{C}_h} \|w_h^* - w\|_{1,K}^2\}^{1/2} \le Ch\{h_i^k(\|g\|_{k-2} + t\|g\|_{k-1}) + h_b(\|g\|_{-1} + t\|g\|_0)\}, \tag{48}
$$

$$
\|w_h^* - w\|_0 \le Ch^2\{h_i^k(\|g\|_{k-2} + t\|g\|_{k-1}) + h_b(\|g\|_{-1} + t\|g\|_0)\}. \tag{49}
$$

Huomautus 4.2. Koska jälkikäsitellyn taipuma-approksimaation optimaalinen suppeneminen perustuu alkuperäisen taipuma-approksimaation superkonvergenssiin sekä kiertymän ja leikkausvoiman alkuperäisten elementtiapproksimaatioiden optimaaliseen suppenemiseen, lauseiden 4.1 ja 4.2 virhearviot pätevät myös stabiloiduille MITC-tyyppisesti redusoiduille nelikulmioelementeille. Lisäksi lauseen 4.1 virhearvioista nähdään, että lauseen 4.2 virhearviot voidaan johtaa muillekin sellaisille elementeille, joille pätevät superkonvergenssituloksia 3.2 ja 3.3 sekä lauseen 3.1 virhearvioita vastaavat tulokset.

5 NUMEERISET TULOKSET

Numeeriset tulokset koskevat seuraavanlaista jäykästi tuettua neliölaattaa: $\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$, $\nu = 0.3$ ja $t = 0$ (Kirchhoff—Love-rajatapaus). Kuormitus $g = 1/(6(1-\nu))\Delta^2 w = 1$.

Symmetrian takia vain laatan keskipinnan positiivinen neljännes on mallinnettu. Laskuissa on käytetty sekä säännöllistä että epäsäännöllistä (Delanay-kolmiointi) verkkoa, ks. kuvat 1 ja 3. Elementtien asteluku $k = 1$ (lineaarinen), 2 (kvadraattinen) tai 3 (kuubinen). Elementtien lukumäärä mallinnettavan alueen kutakin reunaa kohti on $N = 2, 4, 8$ tai 16, siis verkontiheys $h \approx 1/N$.

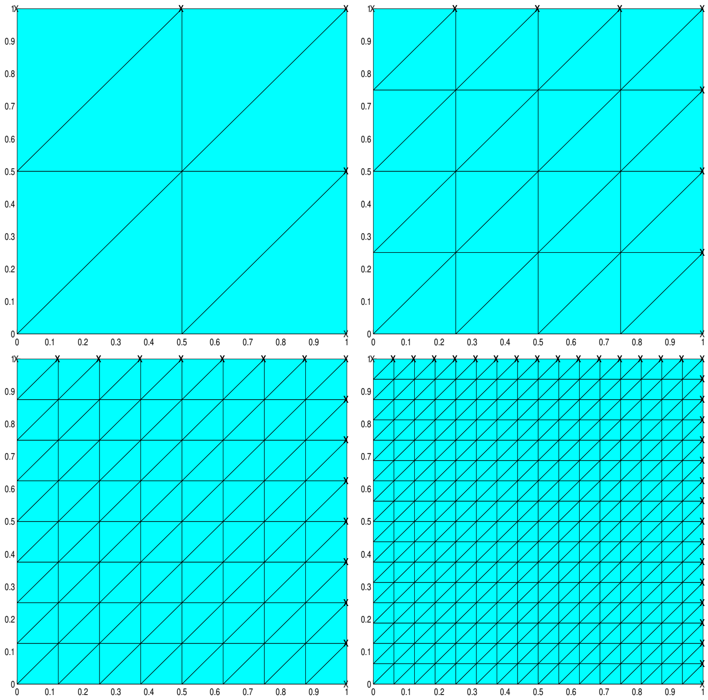
Lineaarisille elementeille stabilointikerroin $\alpha_K = 0.1$. Korkeampiasteisille elementeille on käytetty monimutkaisempaa stabilointikertoimen määritystä [9], jonka tuloksena kvadraattisille elementeille $0.0089 \leq \alpha_K \leq 0.1143$ ja kuubisille elementeille $0.0090 \leq \alpha_K \leq 0.0223$.

Suhteelliset L^2-virheet on esitetty kuvissa 2 ja 4 sekä taulukoissa 1 ja 2. Taipuman alkuperäisen elementtiapproksimaation (katkoviiva, e_h) ja jälkikäsitellyn elementtiapproksimaation (jatkuva viiva, e_h^*) suhteelliset virheet on esitetty logaritmiasteikolla elementtilukumäärän N suhteen. Lisäksi kuvissa 2 ja 4 on esitetty taipuman alkuperäisen elementtiapproksimaation kulmasolmuarvojen painotetun keskiarvon suhteellinen virhe (pisteviiva).

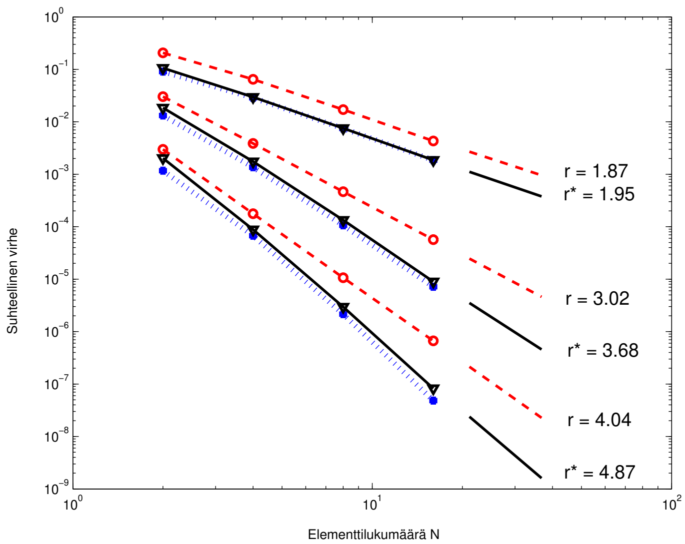
Jotta numeerisia tuloksia voidaan verrata teoriatuloksiin, muotoa $N^{-r} \approx h^r$ oleva funktio on sovitettu laskentatuloksiin pienimmän neliösumman menetelmällä. Sovitusta vastaavat suorat ja niiden kulmakertoimet r ja r^* on esitetty kuvissa 2 ja 4 varsinaisten tulosten jatkeena.

Vertailun perusteella numeeriset tulokset ovat yhteneviä teoriatulosten kanssa: Kun $k = 2$ tai 3, alkuperäisen elementtiapproksimaation suppenemisnopeus $r \approx k + 1$ ja jälkikäsitellyn elementtiapproksimaation suppenemisnopeus $r^* \approx k+2 \approx r+1$ — kuvissa 2 ja 4 jatkuva viiva laskee astetta jyrkemmin kuin katkoviiva. Siis tavoiteltu verkontiheyden lisäpotenssi on saavutettu. Myös taipuman alkuperäisen elementtiapproksimaation kulmasolmuarvojen superkonvergenssi nähdään kuvista 2 ja 4 — pisteviiva laskee astetta jyrkemmin kuin katkoviiva.

Kun $k = 1$, suppenemisnopeus $r \approx k + 1 \approx r^*$, mutta myös tässä tapauksessa virhe pienenee — kuvissa 2 ja 4 jatkuva viiva kulkee alempana kuin katkoviiva. Taulukoista 1 ja 2 virheiden pieneneminen nähdään tarkemmin — parhaimmillaan suhteellinen virhe pienenee noin kymmenesosaan alkuperäisestä.



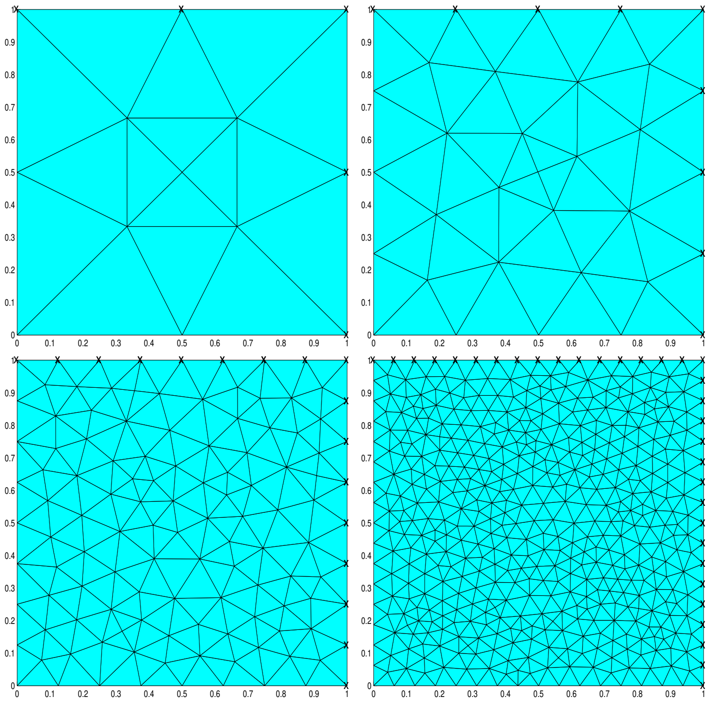
Kuva 1: Säännölliset verkot, kun $N = 2, 4, 8, 16$.



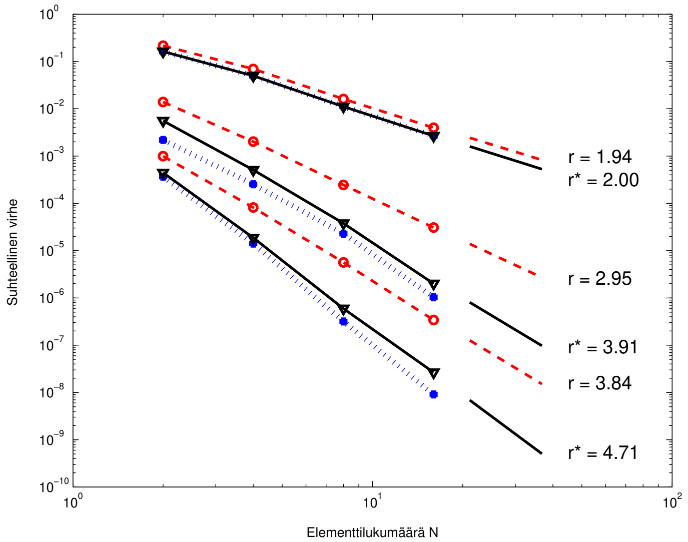
Kuva 2: Suhteellisen L^2-virheen suppeneminen säännöllisellä verkolla, kun $k = 1, 2, 3$ (e_h katkoviivalla, e_h^* jatkuvalla viivalla, e_h:n kulmasolmuarvot pisteviivalla).

Taulukko 1: Suhteellinen L^2-virhe säännöllisellä verkolla.

N	2	4	8	16
$k=1$				
e_h	2.069×10^{-1}	6.449×10^{-2}	1.707×10^{-2}	4.308×10^{-3}
e_h^*	1.062×10^{-1}	2.957×10^{-2}	7.525×10^{-3}	1.858×10^{-3}
$k=2$				
e_h	3.024×10^{-2}	3.874×10^{-3}	4.639×10^{-4}	5.663×10^{-5}
e_h^*	1.850×10^{-2}	1.750×10^{-3}	1.334×10^{-4}	8.954×10^{-6}
$k=3$				
e_h	2.979×10^{-3}	1.766×10^{-4}	1.062×10^{-5}	6.655×10^{-7}
e_h^*	2.030×10^{-3}	8.828×10^{-5}	2.952×10^{-6}	8.251×10^{-8}



Kuva 3: Epäsäännölliset verkot, kun $N = 2, 4, 8, 16$.



Kuva 4: Suhteellisen L^2-virheen suppeneminen epäsäännöllisellä verkolla, kun $k = 1, 2, 3$ (e_h katkoviivalla, e_h^* jatkuvalla viivalla, e_h:n kulmasolmuarvot pisteviivalla).

Taulukko 2: Suhteellinen L^2-virhe epäsäännöllisellä verkolla.

N	2	4	8	16
$k = 1$				
e_h	2.162×10^{-1}	6.943×10^{-2}	1.610×10^{-2}	3.972×10^{-3}
e_h^*	1.626×10^{-1}	4.990×10^{-2}	1.112×10^{-2}	2.668×10^{-3}
$k = 2$				
e_h	1.390×10^{-2}	2.023×10^{-3}	2.455×10^{-4}	3.065×10^{-5}
e_h^*	5.563×10^{-3}	5.099×10^{-4}	3.771×10^{-4}	2.006×10^{-6}
$k = 3$				
e_h	9.940×10^{-4}	8.138×10^{-5}	5.627×10^{-6}	3.407×10^{-7}
e_h^*	4.436×10^{-4}	1.872×10^{-5}	5.947×10^{-7}	2.660×10^{-8}

VIITTEET

[1] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods.* Springer Verlag, New York, 1991.

[2] F. Brezzi, M. Fortin, and R. Stenberg. Error analysis of mixed-interpolated elements for Reissner—Mindlin plates. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 1:125–151, 1991.

[3] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* North-Holland, New York, 1978.

[4] T.J.R. Hughes and L.P. Franca. A mixed finite element formulation for Reissner—Mindlin plate theory: Uniform convergence of all higher-order spaces. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 67:223–240, 1988.

[5] M. Lyly. Yksinkertaiset Reissner—Mindlin-laattaelementit. Lisensiaatintyö, Teknillinen korkeakoulu, 1996.

[6] M. Lyly. On the connection between some linear triangular Reissner—Mindlin plate bending elements. *Numer. Math.*, 85:77–107, 2000.

[7] M. Lyly, J. Niiranen, and R. Stenberg. Postprocessing schemes for MITC plate elements. In preparation, 2003.

[8] M. Lyly and R. Stenberg. New three and four noded plate bending elements. *Rakenteiden Mekaniikka*, 27:3–29, 1994.

[9] M. Lyly and R. Stenberg. Stabilized finite element methods for Reissner—Mindlin plates. Forschungsbericht 4, Universität Innsbruck, Institut für Mathematik und Geometrie, Juli 1999. (`http://www.math.hut.fi/~rstenber/`).

[10] J. Pitkäranta. Analysis of some low-order finite element schemes for Mindlin—Reissner and Kirchhoff plates. *Numer. Math.*, 53:237–254, 1988.