

Matikka-akatemia

Verkkoteoriaa

Riikka Kangaslampi

6.11.2017

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

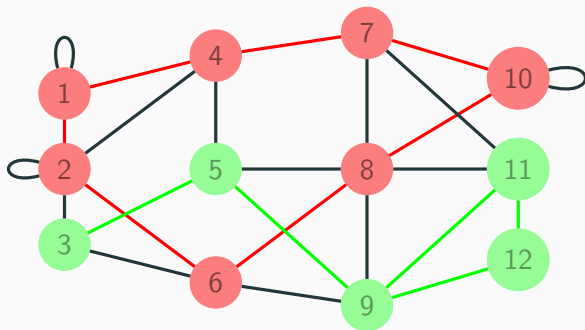
Verkkojen peruskäsitteitä

(...) networks may be used to model a huge array of phenomena across all scientific and social disciplines. Examples include the World Wide Web, citation networks, social networks (e.g., Facebook), recommendation networks (e.g., Netflix), gene regulatory networks, neural connectivity networks, oscillator networks, sports playoff networks, road and traffic networks, chemical networks, economic networks, epidemiological networks, game theory, geospatial networks, metabolic networks, protein networks and food webs, to name a few.

(Grady & Polimeni: Discrete Calculus. Springer 2010.)

- **Verkko** on pari $[V, E]$, missä V on joukko, jonka alkiot ovat verkon **solmut**, ja E on verkon solmujen välisten **linkkien** joukko.
- Verkko on suunnattu tai suuntaamaton riippuen siitä, tarkastellaanko yksi- vai kaksisuuntaisia linkkejä.
- Jos verkon kahden solmun välillä on linkki, niin ne ovat toistensa *naapureita* ja kyseisen linkin *päätesolmut*.
- Suuntaamaton verkko $[V, E]$ on *yksinkertainen*, jos verkossa ei ole silmukoita (linkkiä solmusta takaisin samaan solmuun).

Esimerkki 1 (Yhtenäinen, ei-yksinkertainen verkko)



Punaisella on piirretty yksinkertainen sykli $[1, 2, 6, 8, 10, 7, 4, 1]$ ja vihreällä polku $[3, 5, 9, 11, 12, 9]$, joka ei ole yksinkertainen. Solmujono $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$ ei sen sijaan ole polku, koska esimerkiksi $\{3, 4\}$ ei ole linkki.

Esimerkki 2

Montako linkkiä n -solmuisessa yksinkertaisessa verkossa voi enintään olla?

Vastaus: $\frac{n(n-1)}{2}$. Tällaista verkkoa kutsutaan täydelliseksi.

Määritelmä 3

Verkon (V, E) solmun $v \in V$ aste $\deg(v)$ on niiden linkkien lukumäärä, joiden toinen päätepiste on v .

Lause 4 (Kättelylemma)

Jokaisella verkolla solmujen asteiden summa on kaksi kertaa linkkien lukumäärä.

Todistus.

Käydään linkit läpi yksi kerrallaan. Kukin linkki kasvattaa solmujen astelukujen summaa kahdella, sillä kunkin linkin molemmissa päissä on solmu, joiden astelukuun linkki lasketaan kerran. Siispä linkkien lukumäärä on puolet solmujen astelukujen summasta. $\square$

Milloin kaksi verkkoa ovat samat?

Isomorfismilla tarkoitetaan sellaista kahden joukon välistä kuvausta, joka säilyttää joukon rakenteen.

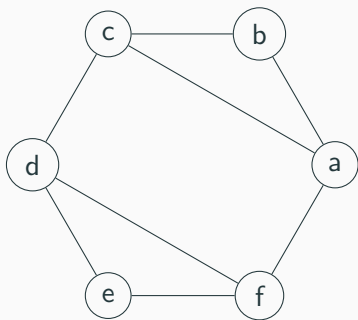
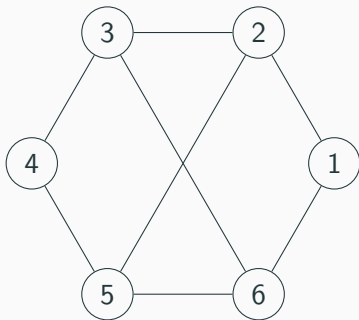
Määritelmä 5

Kaksi verkkoa ovat *isomorfiset*, jos toisen verkon solmut voidaan nimetä uudelleen siten, että tämän jälkeen linkit molemmissa verkoissa ovat samannimisten solmujen välillä.

Isomorfiset verkot ovat esitystä vaille "samat". Esimerkiksi solmujen asteluvut ja syklien pituudet ovat samoja.

Esimerkki 6

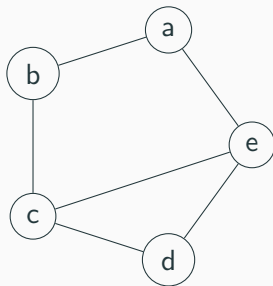
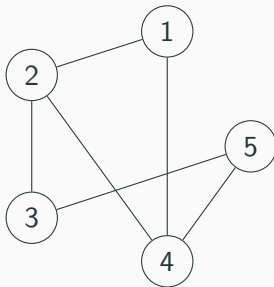
Ovatko alla olevat verkot isomorfiset?



Eivät. Vasemmanpuoleisessa verkossa ei ole yhtään sykliä, jonka pituus olisi 3, mutta sellaisia on oikeanpuoleisessa verkossa. Tästä seuraa, etteivät verkot voi olla isomorfiset.

Esimerkki 7

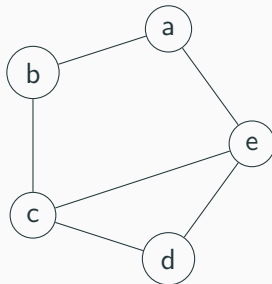
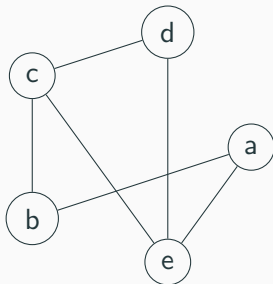
Ovatko alla olevat verkot isomorfiset?



Kyllä. Voidaan nimetä uudelleen solmu 1 solmuksi d, $2=c$, $4=e$, $3=b$ ja $5=a$, jonka jälkeen linkit molemmissa verkoissa ovat cb, ba, ae, ed, dc ja ce.

Esimerkki 7

Ovatko alla olevat verkot isomorfiset?



Kyllä. Voidaan nimetä uudelleen solmu 1 solmuksi d, 2=c, 4=e, 3=b ja 5=a, jonka jälkeen linkit molemmissa verkoissa ovat cb, ba, ae, ed, dc ja ce.

Määritelmä

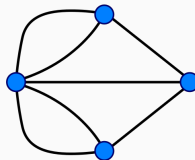
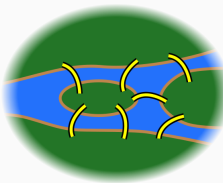
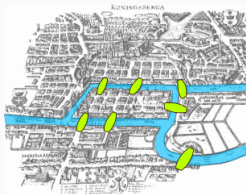
Kävely verkolla (V, E) on jono linkkejä siten, että kahdella peräkkäisellä linkillä on yhteinen solmu.

Määritelmä 8

Verkon *Eulerin kävely* on kävely, joka käy läpi verkon kaikki *linkit* täsmälleen kerran.

Vastaavasti *Eulerin sykli*: Eulerin kävely, jossa lähtöpiste = päätepiste.

Historiaa: Königsbergin sillat



Sovellus: Chinese postman problem

Postimiehen kannattaa etsiä jakelualueelleen reitti, jossa samaa katu ei kävellä kahdesti ja jossa palataan lähtöpisteeseen.

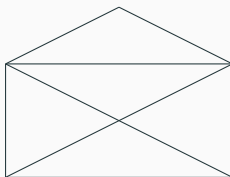
Tällainen löytyy täsmälleen silloin, kun jakelualueen tiekartasta löytyy Eulerin sykli. (Kadut = linkit, katujen risteykset = solmut.)

Lause 9 (Euler 1736)

Yhtenäisellä verkolla on Eulerin sykli täsmälleen silloin, kun sen jokaisen solmun aste on parillinen.

Esimerkki 10 (Terveisiä ala-asteelta)

Voiko alla olevan kuvion piirtää nostamatta kynää paperista?



Eli: onko vastaavalla verkolla Eulerin kävely?

Vastaus: Kyllä. Perustelemme sen seuraavalla seurauksella edellisestä lauseesta:

Seuraus

Verkolla on Eulerin kävely, joka ei ole sykli.

$\iff$ Verkolla on täsmälleen kaksi solmua, joiden aste on pariton.

Todistus.

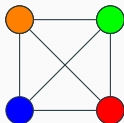
Kaksi paritonasteista solmua syntyy, kun poistetaan Eulerin syklistä yksi linkki, ja toisinpäin (yhdistetään paritonasteiset solmut linkillä). □

Solmujen väritykset

Määritelmä 11

Verkon $G = (V, E)$ *solmuvärityksessä* verkon solmut väritetään siten, että naapurisolmuilla ei ole samaa väriä. Pienintä mahdollista värien määrää sanotaan verkon G *kromaattiseksi luvuksi* ja merkitään $\chi(G)$.

Esimerkki 12



Esimerkki 13

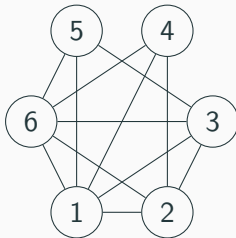
Kuusi opiskelijaa A , B , C , D , E ja F tekevät kuutta eri projektityötä seuraavissa ryhmissä:

1. A, B, C, F
2. B, D
3. C, F
4. B, E
5. A, C, F
6. D, E, F .

Jos kunkin projektin tekeminen valmiiksi kestää kokonaisen päivän kultakin ryhmän jäseneltä, onko mahdollista saada kaikkia projekteja valmiiksi vähemmässä kuin kuudessa päivässä?

Esimerkki 13 (jatkuu)

Muodostetaan *konfliktiverkko* G , jonka kuusi solmua numeroidaan ryhmien mukaisilla numeroilla 1 – 7 ja jossa solmujen välillä on kaari $\Leftrightarrow$ ryhmällä on yhteisiä jäseniä.

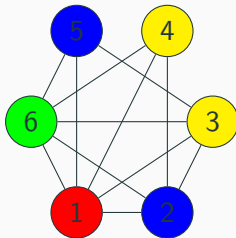


Tällöin kaikkien projektien saaminen valmiiksi on mahdollista $\chi(G)$ päivässä.

Esimerkki 13 (jatkuu)

Koska solmut $\{1, 2, 3, 6\}$ ja niitä yhdistävät kaaret muodostavat täydellisen neljän solmun verkon verkon, niin on oltava $\chi(G) \geq 4$.

Toisaalta näemme kuvasta, että solmut 5 ja 2 voidaan värittää samalla värillä, samoin solmut 4 ja 3.



Siten $\chi(G) = 4$ eli neljä päivää riittää.