

Harjoitus 17.5.

1. Piste D jakaa tasasivuisen kolmion ABC sivun AC ja piste E sivun AE suhteessa $AD : DC = BE : EA = 1 : 2$. Janat BD ja CE kohtaavat pisteessä O . Osoita, että $\sphericalangle AOC = 90^\circ$.
2. Olkoot kolmiossa ABC pisteestä A alkava korkeus AD ja H kolmion ABC ortokeskus eli kolmion korkeusjanojen leikkauspiste. Lisäksi olkoon K pisteen D kautta kulkevan ympyrän, joka sivuaa janaa BH pisteessä H , keskipiste. Näytä, että jana DK puolittaa janan AC .
3. Olkoon g reaalilukujen joukossa määritelty funktio, joka toteuttaa ehdon $g(g(x)) = x^2 - x + 1$ jokaisella x . Määritä $g(0)$. (Baltian tie 2011)
4. Funktio $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ toteuttaa ehdon $f(xf(y)) = yf(x)$ kaikilla x ja y . Osoita, että f on pariton eli $f(-x) = -f(x)$. (Kazakstan 2012)
5. Olkoon $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ vähenevä jono positiivisia reaalilukuja niin, että jokaisella n pätee

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + \dots + \frac{x_{n^2}}{n} \leq 1.$$

Osoita, että kaikilla k on voimassa

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots + \frac{x_k}{k} \leq 3.$$

(Intian alueelliset matematiikkaolympialaiset 2000)

Analysyä

6. Olkoon $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ funktio, jonka toisella derivaatalla on origossa äärellinen, nollassa eroava arvo. Jos edelleen $f(0) = 0$, voidaan riittävän pienellä suurella $h > 0$ arvolla kirjoittaa

$$\frac{f(-h)}{-h} = f'(\xi), \quad \frac{f(h)}{h} = f'(\eta), \quad \text{missä } -h < \xi < 0 < \eta < h.$$

Todista $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta - \xi}{h} = 1$.

Vinkki: Jos f on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva origon ympäristössä, niin origon ympäristössä on voimassa

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \varepsilon(x)x^2,$$

missä $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.