Harjoitus 19.4.

1. Olkoot reaaliluvut a, b ja c kaikki välillä $[0, 1]$. Osoita, että kaikki kolme lauseketta $a(1-b)$, $b(1-c)$ ja $c(1-a)$ eivät voi olla yhtä aikaa suurempia kuin $1/4$.

2. $ABCD$ on kupera nelikulmio. Konstruoi nelikulmio seuraavasti: valitse A' niin, että A on janan DA' keskipiste; valitse B' niin, että B on janan AB' keskipiste; valitse C' niin, että C on janan BC' keskipiste ja valitse D' niin, että D on janan CD' keskipiste. Osoita, että $a' = 5a$, missä a' on nelikulmion $A'B'C'D'$ ja a nelikulmion $ABCD$ ala. (Neuvostoliiton valmennustehtävä)

3. Kolmen positiivisen luvun summa on 6. Mikä on pienin arvo, jonka lukujen neliöiden summa voi olla? Entä mikä on lukujen kuutioiden summan pienin arvo?

4. (Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö). Olkoot a_j ja $b_j, 1 \leqslant j \leqslant n$, reaalisia. Osoita, että

$$(a_1b_1 + a_1b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right).$$

Milloin yhtäsuuruus on voimassa?

5. Olkoon Q summa positiivisten lukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kaikista parittaisista tuloista ja olkoon P lukujen neliöiden summa. Näytä, että $Q \leqslant \frac{n-1}{2}P$.

Hieman analyysiä

6. Laske raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x + 4^x + 5^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Vinkki: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ja $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a,\ a > 0, a \neq 1.$