

Harjoitus 5.4.

1. Kuusinumeroinen luku alkaa numerolla 4 ja muut numerot ovat täysin satunnaisia. Millä todennäköisyydellä luvussa esiintyy ainakin kerran peräkkäin numerot 1 ja 3 tässä järjestyksessä?
2. Olkoon Γ suorakulmaisen kolmion ABC ($\sphericalangle A = 90^\circ$) ympäri piirretty ympyrä. Ympyrän Γ pisteeseen A asetettu tangentti leikkaa janan BC jatkeen pisteessä P . Olkoon kaaren AB keskipiste M . Janan PM jatke leikkaa ympyrän Γ myös pisteessä Q . Merkitään ympyrän Γ pisteeseen Q asetetun tangentin ja janan AC jatkeen leikkauspistettä kirjaimella K . Osoita, että $\sphericalangle PKC = 90^\circ$. (Iranin geometriaolympialaiset 16)
3. Todista Wilsonin lause: Jos p on alkuluku, niin $(p-1)! + 1$ on jaollinen luvulla p . Jos taas p on yhdistetty luku, niin $(p-1)! + 1$ ei ole jaollinen luvulla p .
4. Olkoon $p \in \mathbf{P}$ (= alkuluvut) sellainen, että kun se jaetaan luvulla 4, niin jakojäännös on 1. Osoita, että on olemassa $n \in \mathbf{Z}$ niin, että $n^2 + 1$ on jaollinen luvulla p . (Neuvostoliiton olympiavalmennustehtävä)

Hieman analyysiä

5. Laske $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k^2 + 1} + \frac{k}{k^2 + 4} + \frac{k}{k^2 + 9} + \dots + \frac{k}{2k^2} \right)$.