

Matematiikkaharjoitus to 15.3. 2018

Helpohkoja:

1. Määritä lausekkeen $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$ pienin arvo, kun $abc = 1$ ja a, b ja c ovat positiivisia reaalilukuja.

2. Etsi yhtälön $17x^2 - 33y^4 = 1068$ kokonaislukuratkaisut.

Vaativampia:

3. Osoita, että $\binom{p^n}{p} \equiv p^{n-1} \pmod{p^n}$.

4. Olkoon ABC tasakylkinen kolmio ($AC = BC$), jonka sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I . Piste P sijaitsee kolmion AIB ympäri piirretyn ympyrän kehällä ja kolmion ABC sisällä. Piste P kautta piirretyt, janojen CA ja CB kanssa yhdensuuntaiset suorat kohtaavat janan AB pisteissä D ja E , tässä järjestyksessä. Piste P kautta piirretty, janan AB suuntainen suora kohtaa janat CA ja CB pisteissä F ja G , tässä järjestyksessä. Osoita, että janojen DF ja EG jatkeet kohtaavat kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän samassa pisteessä.

5. Muodostetaan lukukolmio seuraavasti:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \end{array}$$

Seuraavat rivit alaspäin rakentuvat samalla tavoin eli jokainen luku on yläpuolella olevien kolmen luvun (suoraan yläpuolella, ylös ja yksi oikealle, ja ylös ja yksi vasemmalle) summa. Jos paikka on tyhjä, se tulkitaan nolaksi. Osoita, että kolmannesta rivistä lähtien (alaspäin mentäessä) ei ole mahdollista, että olisi rivi, jossa olisi vain parittomia lukuja.

6. Hieman analyysiä: määritä $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.