

## Matematiikkaharjoitus to 8.2. 2018

Helpohkoja:

1. Osoita, että jos  $n$  on kokonaisluku,  $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$  on jonkin kokonaisluvun neliö.
2. Neliön sivun pituus on 9. Neliön sisälle asetetaan 90 pistettä satunnaisesti. Osoita, että löytyy vähintään kaksi pistettä, joiden etäisyys on alle  $\sqrt{2}$ .
3. Johda 22,5 astetta tangentin tarkka arvo. Vihje: Tasakylkisestä suorakulmaisesta kolmiosta voi olla apua. Puolitetaan kulma ja käytetään kulmanpuolittajalauseetta.

Vaativampia:

4. Määritä pienin arvo lausekkeelle  $|12^m - 5^n|$ , kun  $m$  ja  $n$  ovat kokonaislukuja.
5. Laatikossa on 129 kolikkoa, joista yhdessä on kaksi klaavapuolta. Pelaaja valitsee yhden kolikon sattumanvaraisesti ja heittää sitä kahdeksan kertaa saaden joka kerta klaavan. Millä todennäköisyydellä yhdeksännen heiton tulos on klaava? Perustele tulos ehdollisen todennäköisyyden avulla.
6. Olkoon  $PQ$  puoliympyrän  $H$  säde. Ympyrä  $O$  sivuaa sisäpuolisesti puoliympyrää  $H$ ; olkoon  $C$  sen sivuamispiste halkaisijalla  $PQ$ . Olkoon piste  $A$  puoliympyrän  $H$  kaarella ja piste  $B$  halkaisijalla  $PQ$  siten, että  $AB$  ja  $PQ$  ovat toisiaan vasten kohtisuorassa. Lisäksi  $AB$  pitää olla tangentti ympyrälle  $O$ . Osoita, että  $AC$  puolittaa kulman kolmion  $PAB$  kärjestä  $A$ .
7. Hieman analyysiä: Olkoon  $a_n$  jokin ei-negatiivinen lukujono siten, että ja sarja  $\sum a_n$  hajaantuu.

a) Osoita, että sarja  $\sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$  suppenee.

b) Osoita esimerkiksi, että on olemassa tehtävän ehdot täyttävä, hajaantuva sarja

$\sum a_n$  siten, että sarja  $\sum \frac{a_n}{1+na_n}$  hajaantuu.