Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Panu Lahti

Rajoitetusti heilahtelevien funktioiden Lebesguen lause

Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi diplomi-insinöörin tutkintoa varten teknillisen fysiikan ja matematiikan tutkinto-ohjelmassa.

Espoo 24.05.2011

Valvoja: Juha Kinnunen
Ohjaaja: Juha Kinnunen

Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Tiivistelmä

Tekijä:	Panu Lahti
Tutkinto-ohjelma:	Teknillisen fysiikan ja matematiikan tutkinto-ohjelma
Pääaine:	Matematiikka
Sivuaine:	Teknillinen fysiikka
Työn nimi:	Rajoitetusti heilahtelevien funktioiden Lebesguen lause
Title in English:	Lebesgue theorem for functions of bounded variation
Opetusyksikön koodi:	Mat-1
Työn valvoja:	Juha Kinnunen
Työn ohjaaja:	Juha Kinnunen

Rajoitetusti heilahtelevat funktiot eli BV-funktiot (engl. bounded variation) ovat lokaalisti integroituvia funktioita, joiden ensimmäisen kertaluvun heikot osittaisderivaatat ovat Radon-mittoja. Ne muodostavat siis yleisemmän funktioluokan kuin Sobolevin funktiot, joiden ensimmäisen kertaluvun heikot osittaisderivaatat ovat lokaalisti integroituvia funktioita. Keskeisimpiä BV-funktioille päteviä tuloksia ovat kompaktisuustulos, coarea-kaava sekä Sobolevin ja Poincarén epäyhtälöiden versiot.

Mielenkiintoisen BV-funktioiden erikoistapauksen muodostavat niin sanottujen äärellisperimetristen joukkojen karakteristiset funktiot. Tällaisille joukoille voidaan määritellä *redusoitu reuna*, joka on topologisen reunan osajoukko. Osoittautuu, että lähellä redusoitua reunaa joukko muistuttaa mittateoreettisessa mielessä puoliavaruutta.

Edelleen voidaan määritellä joukon mittateoreettinen reuna, joka on myös topologisen reunan osajoukko ja muistuttaa mittateoreettisessa mielessä hyvin paljon redusoitua reunaa. Muun muassa tätä tietoa hyödyntäen voidaan todistaa vahva tulos redusoidun reunan rakenteesta: se koostuu sileiden hyperpintojen kompakteista osajoukoista. Lisäksi äärellisperimetrisen joukon derivaattana toimiva Radon-mitta on itse asiassa vain Hausdorffin mitta rajoitettuna redusoidulle reunalle.

Coarea-kaavan mukaan BV-funktion tasojoukot ovat äärellisperimetrisiä joukkoja, mikä mahdollistaa mainittujen tulosten soveltamisen yleisiin BV-funktioihin. Osoittautuu, että BV-funktiot ovat (sopiva edustaja valiten) mittateoreettisesti jatkuvia lukuunottamatta ”hyppyjä” yli sileiden hyperpintojen. Täsmällisesti tämä tulee ilmaistuksi BV-funktioiden Lebesguen lauseessa. Tulos on olennaisesti vahvempi kuin pelkästään integroituville funktioille saatava Lebesguen lause, joskin heikompi kuin Sobolevin funktioille saatava.

Avainsanat: rajoitettu heilahtelu, variaatiomitta, perimetrimitta, redusoitu reuna, mittateoreettinen reuna, struktuurilause, Lebesguen lause

Päivämäärä: 24.05.2011 **Kieli:** suomi **Sivumäärä:** 61

Aalto University
School of Science
Department of Mathematics and Systems Analysis

Abstract

Author:	Panu Lahti
Degree Programme:	Degree Programme in Engineering Physics and Mathematics
Major Subject:	Mathematics
Minor Subject:	Engineering Physics
Title:	Lebesgue theorem for functions of bounded variation
Title in Finnish:	Rajoitetusti heilahtelevien funktioiden Lebesguen lause
Chair:	Mat-1
Supervisor:	Juha Kinnunen
Instructor:	Juha Kinnunen

Functions of bounded variation, abbreviated BV functions, are locally integrable functions whose weak first partial derivatives are Radon measures. Thus they form a more general class of functions than Sobolev functions, whose weak first partial derivatives are locally integrable functions. Some of the most central results derived for BV functions include a compactness result, the coarea formula, and versions of the Sobolev and Poincaré inequalities.

The characteristic functions of so-called sets of finite perimeter form an interesting special case of BV functions. For these sets we can define the *reduced boundary,* which is a subset of the topological boundary. It turns out that in the neighborhood of the reduced boundary the set resembles a half space in a measure theoretic sense.

Further, we can define the measure theoretic boundary of a set. This is also a subset of the topological boundary and closely resembles the reduced boundary in a measure theoretic sense. Utilizing this and other minor results we can prove a strong result about the structure of the reduced boundary: it is made up of compact subsets of smooth hypersurfaces. In addition, the Radon measure that acts as the derivative of the set of finite perimeter is simply the Hausdorff measure restricted to the reduced boundary.

According to the coarea formula, the level sets of BV functions are sets of finite perimeter. This enables us to apply the aforementioned results to general BV functions. It turns out that BV functions are (with the choice of a suitable representative) measure theoretically continuous apart from ”jumps” over smooth hypersurfaces. This is expressed in an exact manner in the Lebesgue theorem for BV functions. The result is substantially stronger than the Lebesgue theorem for functions that are merely integrable, but weaker than the corresponding result for Sobolev functions.

Keywords: bounded variation, variation measure, perimeter measure, reduced boundary, measure theoretic boundary, structure theorem, Lebesgue theorem

Date: 24.05.2011 **Language:** Finnish **Number of pages:** 61

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Tämän diplomityön aiheena ovat $\mathbb{R}^n$:n reaaliarvoiset rajoitetusti heilahtelevat funktiot. Näiden niin kutsuttujen BV-funktioiden (engl. bounded variation) muodostama Banach-avaruus on Sobolevin avaruuden laajennus — siinä missä Sobolevin funktioiden ensimmäisen kertaluvun heikot osittaisderivaatat ovat p-integroituvia funktioita, BV-funktioiden ensimmäisen kertaluvun heikot osittaisderivaatat ovat yleisesti pelkkiä Radon-mittoja. Tämä on olennaisesti heikoin tapa, jolla funktio voi olla derivoituva mittateoreettisessa mielessä. [1, s. 166–][2, s. 220–][3, s. 3–]

Vaikka tässä työssä käsitellään vain yleistä n-ulotteista tapausta, BV-funktioita tutkittiin aluksi yhdessä ulottuvuudessa, joka muodostaa edelleen mielenkiintoisen erikoistapauksen [1, s. 216–][4, s. 530–][5, s. 204–]. BV-funktioiden teoriaa voidaan hyödyntää muun muassa minimihyperpintoja tutkittaessa [3][6]. Muita sovellusalueita ovat monen muuttujan Fourier-sarjat, epälineaariset osittaisdifferentiaaliyhtälöt ja matemaattinen fysiikka (ks. esimerkiksi [7]).

Tässä työssä keskitytään kuitenkin puhtaasti BV-funktioiden teoriaan. Työn päätavoitteena on todistaa BV-funktioille pätevä Lebesguen lauseen versio. Lebesguen lause on varsin helppo todistaa lokaalisti integroituville funktioille [1, s. 43][4, s. 456], joille se on muotoa

$$\lim_{r\to 0} \fint_{\bar{B}(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0 \quad \mathcal{L}^n\text{-m.k. } x \in \mathbb{R}^n$$

(johdannon lopussa esitellään käytetyt merkinnät). Sobolevin funktioille puolestaan pätee Lebesguen lauseesta vahvempi versio, jossa yllä olevan tapaisen integraalikeskiarvon raja-arvo on nolla lukuunottamatta joukkoa, jonka *p-kapasiteetti* on nolla [1, s. 146, 160]. Syyksi voidaan nähdä se, että heikkojen osittaisderivaattojen olemassaolo antaa Sobolevin funktioille enemmän rakennetta kuin mitä yleisillä lokaalisti integroituvilla funktioilla on. BV-funktioille sen sijaan saadaan Lebesguen lauseesta hieman Sobolevin funktioiden tapausta heikompi versio, koska BV-funktioiden avaruus on Sobolevin funktioiden avaruutta yleisempi.

Tämä työ perustuu lähinnä BV-funktioita käsitteleviin lähteisiin [1], [2] ja [3]. Lähteistä [4] ja [8] puolestaan löytyy joitakin tarvittavia reaalianalyysin ja mittateorian tuloksia. Erityisesti lähteessä [4] on hyödyllisiä tuloksia liittyen reaaliakselin funktioihin, muun muassa absoluuttisesti jatkuviin funktioihin ja myös BV-funktioihin. Näitä tarvitaan myös todistettaessa tiettyjä $\mathbb{R}^n$:n BV-funktioille päteviä lauseita. Reaalianalyysin ja mittateorian peruskäsitteistö oletetaan työssä tunnetuksi. Myöskään BV-funktioiden teorian perustuloksia ei esitetä, vaan viitataan pelkästään mainittuihin lähteisiin. Käytetyt määritelmät ja merkinnät, jotka on listattu johdannon lopussa, noudattavat enimmäkseen lähdettä [1]. Näihin viitaten luetellaan tässä lyhyesti kaikkein keskeisimmät tarvittavat tulokset.

Kuten jo aiemmin mainittiin, Sobolevin funktio on aina BV-funktio. BV-funktioiden variaatiomitta on alaspäin puolijatkuva L^1_{loc}:ssa suppenemisen suhteen. Kuten Sobolevin funktioita, myös BV-funktioita on mahdollista approksimoida sileillä funktioilla, joskin hieman heikommassa mielessä. BV-funktioiden avaruudelle saadaan myös todistettua kompaktisuustulos, ja lisäksi voidaan määritellä BV-funktion *jälki* funktion määrittelyalueen reunalla. [1, s. 166–183][2, s. 220-227][3, s. 3-17, 30–41]

BV-funktioiden coarea-kaavan mukaan BV-funktion variaatiomitta voidaan esittää funktion tasojoukkojen perimetrimittojen integraalina. BV-funktioille voidaan myös johtaa Sobolevin ja Poincarén epäyhtälöt. Nämä ovat itsessään käyttökelpoisia, ja lisäksi niiden avulla voidaan edelleen todistaa äärellisperimetrisille joukoille niin sanotut isoperimetriset epäyhtälöt. [1, s. 185–192][2, s. 230-233][3, s. 20–26]

Yllä mainittujen perustulosten pohjalta lähdetään luvussa 2 rakentamaan lokaalisti äärellisperimetristen joukkojen teoriaa. Tällaisille joukoille määritellään *redusoitu reuna*, joka on topologisen reunan osajoukko. Redusoidun reunan pisteille todistetaan ensin joukko käyttökelpoisia epäyhtälöitä, minkä jälkeen näytetään vahva tulos, jonka mukaan joukko muistuttaa redusoidun reunan pisteen lähellä mittateoreettisessa mielessä puoliavaruutta.

Luvussa 3 jatketaan lokaalisti äärellisperimetrisistä joukoista. Ensin näytetään, että redusoitu reuna on mittateoreettisesti melkein sama kuin niin sanottu mittateoreettinen reuna. Sitten siirrytään joidenkin teknisten välitulosten tukemana tutkimaan redusoidun reunan rakennetta. Osoittautuu, että redusoitu reuna koostuu pientä joukkoa lukuunottamatta sileiden hyperpintojen kompakteista osajoukoista. Edelleen perimetrimitta osoittautuu identtiseksi redusoidulle reunalle rajoitetun Hausdorffin mitan kanssa.

Luvussa 4 siirrytään tutkimaan yleisiä BV-funktioita, rajoittumatta lokaalisti äärellisperimetristen joukkojen karakteristisiin funktioihin. Ensin tarkastellaan approksimatiivisen raja-arvon ja jatkuvuuden käsitteitä. Osoittautuu, että joukko, jossa BV-funktiolla ei ole approksimatiivista raja-arvoa, sisältyy funktion (äärellisperimetristen) tasojoukkojen mittateoreettisiin (tai redusoituihin) reunoihin. Nyt voidaan edellisen luvun tuloksen perusteella näyttää, että kyseinen joukko rakentuu itse asiassa sileistä hyperpinnoista. Tämän jälkeen päästään vihdoin BV-funktioille pätevään Lebesguen lauseeseen, jossa on olennaisesti kaksi osaa: ensimmäisen mukaan lähes kaikki pisteet, joissa approksimatiivinen raja-arvo on olemassa, ovat Lebesguen pisteitä ja siten myös approksimatiivisen jatkuvuuden pisteitä. Sileillä hyperpinnoilla, joissa approksimatiivista raja-arvoa ei ole, puolestaan tapahtuu "hyppäys" arvosta toiseen. Näissä pisteissä funktio on siis vain "toispuoleisesti" approksimatiivisesti jatkuva.

Määritelmät ja merkinnät

Jos $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r \in \mathbb{R}_+$, avointa palloa merkitään $B(x,r)$ ja suljettua palloa $\bar{B}(x,r)$. n-ulotteisia Lebesguen ja Hausdorffin mittoja merkitään symboleilla $\mathcal{L}^n$ ja $\mathcal{H}^n$. n-ulotteisen yksikköpallon ja vastaavan pallonkuoren mittoja merkitään Ω_n ja ω_{n-1} (pallonkuori on tietenkin "$n-1$-ulotteinen" joukko) . Jos μ on ulkomitta ja $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko, ilmaus μ-m.k. $x \in A$ tarkoittaa "melkein kaikilla" $x \in A$, eli lukuunottamatta joukkoa, jonka μ-mitta A:ssa on nolla. Käytetään myös ilmausta μ-m.k. A:ssa eli "melkein kaikkialla" A:ssa. Reaaliakselin osajoukkoja käsiteltäessä (tyypillisesti kyse on esimerkiksi pallojen säteistä) lyhenne m.k. $r \in A$ tarkoittaa $\mathcal{L}^1$-m.k. $r \in A$. Standardisilottajafunktiota [1, s. 122][3, s. 11] merkitään η_ε, $\varepsilon > 0$. Integraalikeskiarvoa merkitään symbolilla $⨍$.

Tässä tekstissä käytetään lähtökohtaisesti tulkintaa, jonka mukaan (lokaalisti) integroituva funktio (erityisesti BV-funktio) $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U,\mu)$, missä $U \subset \mathbb{R}^n$ on avoin joukko ja μ on ulkomitta (tyypillisesti $\mathcal{L}^n$), on määritelty vain μ-nollamittaista joukkoa lukuun ottamatta. Funktiot tulkitaan siis ekvivalenssiluokiksi, ja ne voivat saada myös arvoja $\pm\infty$. Tietyissä erikoistapauksissa tullaan määrittelemään tällaisten funktioiden pisteittäin määriteltyjä edustajia.

Luetellaan sitten BV-funktioista käytetyt määritelmät ja notaatio, seuraten lähdettä [1, s. 166-171].

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko — tässä työssä yleensä $U = \mathbb{R}^n$. Funktio $f \in L^1(U)$ on *rajoitetusti heilahteleva* U:ssa, toisin sanoen $f \in BV(U)$, jos

$$\sup\left\{\int_U f\nabla\cdot\varphi dx \,|\, \varphi \in C^1_0(U;\mathbb{R}^n),\, |\varphi| \le 1\right\} < \infty.$$

Funktio $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ on *lokaalisti rajoitetusti heilahteleva* U:ssa, toisin sanoen $f \in BV_{\mathrm{loc}}(U)$, jos jokaisella $V \subset\subset U$ pätee

$$\sup\left\{\int_V f\nabla\cdot\varphi dx \,|\, \varphi \in C^1_0(V;\mathbb{R}^n),\, |\varphi| \le 1\right\} < \infty.$$

$\mathcal{L}^n$-mitallisella joukolla $E \subset \mathbb{R}^n$ on *äärellinen perimetri* U:ssa, jos sen karakteristiselle funktiolle pätee $\chi_E \in BV(U)$. $\mathcal{L}^n$-mitallisella joukolla $E \subset \mathbb{R}^n$ on *lokaalisti äärellinen perimetri* U:ssa, jos $\chi_E \in BV_{\text{loc}}(U)$. Voidaan näyttää, että jos $f \in BV_{\text{loc}}(U)$, on olemassa Radon-mitta $\|Df\|$ U:ssa ja $\|Df\|$-mitallinen funktio $\sigma : U \to \mathbb{R}^n$ s.e. $|\sigma(x)| = 1$ $\|Df\|$-m.k. $x \in U$ ja

$$\int_U f \nabla \cdot \varphi dx = - \int_U \varphi \cdot \sigma d\|Df\|$$

kaikilla $\varphi \in C_0^1(U; \mathbb{R}^n)$. Tätä kutsutaan BV-funktioiden *struktuurilauseeksi.* Radon-mittaa $\|Df\|$ kutsutaan f:n *variaatiomitaksi.* Silloin, kun $f = \chi_E$, missä E:llä on lokaalisti äärellinen perimetri U:ssa, vaihdetaan merkintöjä seuraavasti: $\|Df\| \hookrightarrow \|\partial E\|$, $-\sigma \hookrightarrow \nu_E$. Radon-mittaa $\|\partial E\|$ kutsutaan E:n *perimetrimitaksi.* Jos $f \in BV_{\text{loc}}(U)$, pätee

$$\|Df\|(V) = \sup \left\{ \int_V f \nabla \cdot \varphi dx \,|\, \varphi \in C_0^1(V; \mathbb{R}^n),\ |\varphi| \leq 1 \right\}.$$

kaikilla avoimilla $V \subset U$. Lopulta BV-normi määritellään funktiolle $f \in BV(U)$ seuraavasti:

$$\|f\|_{BV(U)} := \|f\|_{L^1(U)} + \|Df\|(U).$$

Luku 2

Redusoitu reuna

Tarkastellaan tässä ja seuraavassa luvussa joukkoja, joilla on lokaalisti äärellinen perimetri $\mathbb{R}^n$:ssä. Tärkeäksi osoittautuu tällaisten joukkojen niin kutsuttu redusoitu reuna, joka on topologisen reunan osajoukko. Luvussa nähdään, että redusoidun reunan pisteille voidaan osoittaa muutamia varsin vahvoja tuloksia, joita tarvitaan myöhemmin. Erityisesti nähdään, että redusoidun reunansa lähellä joukko muistuttaa mittateoreettisessa mielessä puoliavaruutta.

2.1 Määritelmä ja perusominaisuuksia

Olkoon siis tässä luvussa $E \subset \mathbb{R}^n$ joukko, jolla on lokaalisti äärellinen perimetri $\mathbb{R}^n$:ssä.

Määritelmä 2.1.1. Piste $x \in \mathbb{R}^n$ kuuluu joukon E *redusoituun reunaan* $\partial^* E$, jos

(i) $\|\partial E\|(\bar{B}(x,r)) > 0 \quad \text{kaikilla } r > 0,$

(ii) $\lim_{r\to 0} \fint_{\bar{B}(x,r)} \nu_E \, d\|\partial E\| = \nu_E^*(x) \in \mathbb{R}^n$ (eli kyseessä olevan raja-arvon tulee olla olemassa), ja

(iii) $|\nu_E^*(x)| = 1.$

Ehdon (i) mukaan piste x todella sijaitsee joukon E reunalla siinä mielessä, että joukon E *perimetri* on nollaa suurempi mielivaltaisen pienissä x-keskisissä palloissa. Voidaankin heti osoittaa, että redusoitu reuna on topologisen reunan osajoukko riippumatta pisteittäin määritellyn edustajan χ_E valinnasta. Otetaan siis mielivaltainen edustaja χ_E ja oletetaan, että $x \notin \partial E$. Tällöin on olemassa joko $B(x,\tilde{r}) \subset \mathbb{R}^n \backslash E$ tai $B(x,\tilde{r}) \subset E$, missä $\tilde{r} > 0$. Edellisessä tapauksessa (pallo valitaan tässä avoimeksi, koska perimetrimitan määritelmä on yksinkertaisin avoimille joukoille)

$$\|\partial E\|(B(x,\tilde{r})) = \sup\left\{\int_{B(x,\tilde{r})} \chi_E(y)\nabla\cdot\varphi(y)\,dy \mid \varphi\in C_0^1(B(x,\tilde{r});\mathbb{R}^n),\ |\varphi|\le 1\right\},$$

missä

$$\int_{B(x,\tilde{r})} \chi_E(y)\nabla\cdot\varphi(y)\,dy = \int_{B(x,\tilde{r})} 0\nabla\cdot\varphi(y)\,dy = 0.$$

Siis $\|\partial E\|(\bar{B}(x,r)) \le \|\partial E\|(B(x,\tilde{r})) = 0$ kaikilla $r < \tilde{r}$. Täten redusoidun reunan määritelmän ehto (i) ei toteudu, ja $x \notin \partial^* E$. Vastaavasti, jos $B(x,\tilde{r}) \subset E$, saadaan

$$\int_{B(x,\tilde{r})} \chi_E(y)\nabla\cdot\varphi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla\cdot\varphi(y)\,dy = 0$$

kaikilla $\varphi \in C_0^1(B(x,\tilde{r});\mathbb{R}^n)$, eli jälleen $x\notin\partial^* E$. Näin ollen $\partial^* E\subset\partial E$. Toisaalta, valitsemalla funktiolle χ_E sopiva edustaja voidaan näyttää, että redusoidun reunan sulkeuma on topologinen reuna, eli $\overline{\partial^* E} = \partial E$ [3, s. 54].

Redusoidun reunan ehdot (i)–(iii) pätevät itse asiassa $\|\partial E\|$-m.k. $x\in\mathbb{R}^n$, mikä nähdään ehdon (i) osalta seuraavasti. Määritellään joukko, jossa ehto (i) ei päde:

$$A := \{x\in\mathbb{R}^n \mid \|\partial E\|(\bar{B}(x,r)) = 0 \text{ jollain } r > 0\}.$$

Jos $\delta > 0$, joukkoperhe

$$\mathcal{B} := \{\bar{B}(x,r)\subset\mathbb{R}^n \mid x\in A,\ 0<r<\delta,\ \|\partial E\|(\bar{B}(x,5r)) = 0\}$$

muodostaa selvästi A:n peitteen. Vitalin peitelauseen [1, s. 27][4, s. 448] perusteella $\mathcal{B}$:stä voidaan poimia pistevieraista palloista koostuva numeroituva kokoelma $\{\bar{B}(x^i,r_i)\}_{i=1}^\infty$, jolle pätee $A\subset\bigcup_{i=1}^\infty \bar{B}(x^i,5r_i)$. Siis

$$\|\partial E\|(A) \le \sum_{i=1}^\infty \|\partial E\|(\bar{B}(x^i,5r_i)) = 0.$$

Tarkastellaan sitten ehtoja (ii) ja (iii). Huomataan, että nämä voivat olla voimassa vain, jos ehto (i) on voimassa. Koska $|\nu_E| = 1$ $\|\partial E\|$-m.k. $\mathbb{R}^n$:ssä, ν_E on lokaalisti integroituva funktio mitan $\|\partial E\|$ suhteen, ja niinpä Lebesguen lauseen [1, s. 43] mukaan

$$\lim_{r\to 0} ⨍_{\bar{B}(x,r)} \nu_E \, d\|\partial E\| = \nu_E(x)$$

$\|\partial E\|$-m.k. $x\in\mathbb{R}^n$ (riippumatta valitusta ν_E:n edustajasta). Siis myös ehdot (ii) ja (iii) pätevät $\|\partial E\|$-m.k. $x\in\mathbb{R}^n$. Täten sen joukon $\|\partial E\|$-mitta, jossa jokin ehdoista (i)-(iii) ei päde, on nolla, eli toisin sanoen $\|\partial E\|(\mathbb{R}^n\setminus\partial^* E) = 0$. Intuitiivisesti $\|\partial E\|$ mittaa vain joukon E redusoitua reunaa. Lisäksi nähdään, että funktio ν_E^* on funktion ν_E edustaja, joka on määritelty jokaisessa redusoidun reunan pisteessä. Vektoria $\nu_E^*(x)$, $x \in \partial^* E$, sanotaan joskus E:n yleistetyksi ulkonormaaliksi [2, s. 233].

Todistetaan seuraavaksi kätevä tulos, joka kertoo joukon E ja sen komplementin $\mathbb{R}^n \setminus E$ välisestä yhteydestä.

Lemma 2.1.2. *Jos joukolla $E \subset \mathbb{R}^n$ on lokaalisti äärellinen perimetri $\mathbb{R}^n$:ssä, sama pätee joukolle $\mathbb{R}^n \setminus E$. Edelleen perimetrimitat $\|\partial E\|$ ja $\|\partial(\mathbb{R}^n \setminus E)\|$ ovat samat, $\nu_E = -\nu_{\mathbb{R}^n \setminus E}$ $\|\partial E\|$-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$, ja redusoidut reunat koostuvat täsmälleen samoista pisteistä.*

Todistus. Kaikilla $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ pätee

$$\int_E \nabla \cdot \varphi \, dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus E} \nabla \cdot \varphi \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \cdot \varphi \, dy = 0,$$

joten

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E \nabla \cdot \varphi \, dy = - \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathbb{R}^n \setminus E} \nabla \cdot \varphi \, dy. \tag{2.1}$$

Siis jos $\chi_E \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (oletus), myös $\chi_{\mathbb{R}^n \setminus E} \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, ja BV-funktioiden struktuurilauseen perusteella yhtälö (2.1) saadaan myös muotoon

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \nu_E \, d\|\partial E\| = - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \nu_{\mathbb{R}^n \setminus E} \, d\|\partial(\mathbb{R}^n \setminus E)\| \tag{2.2}$$

kaikilla $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Katsotaan nyt mittoja. Mille tahansa avoimelle joukolle $U \subset \mathbb{R}^n$ pätee perimetrimitan määritelmän ja yhtälön (2.1) perusteella

$$\begin{aligned} \|\partial E\|(U) &= \sup \left\{ \int_U \chi_E \nabla \cdot \varphi \, dy \mid \varphi \in C_0^1(U; \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_U \chi_{\mathbb{R}^n \setminus E} \nabla \cdot \varphi \, dy \mid \varphi \in C_0^1(U; \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1 \right\} \\ &= \|\partial(\mathbb{R}^n \setminus E)\|(U). \end{aligned}$$

Otetaan sitten mielivaltainen $A \subset \mathbb{R}^n$. Koska $\|\partial E\|$ ja $\|\partial(\mathbb{R}^n \setminus E)\|$ ovat Radon-mittoja, pätee [1, s. 8]

$$\|\partial E\|(A) = \inf\{\|\partial E\|(U) \mid A \subset U, \, U \text{ avoin}\},$$

ja samoin $\|\partial(\mathbb{R}^n \setminus E)\|$:lle. Siis jokaisella avoimella $U \supset A$ pätee

$$\|\partial E\|(A) \leq \|\partial E\|(U) = \|\partial(\mathbb{R}^n \setminus E)\|(U),$$

ja ottamalla nyt infimum yli avointen joukkojen $U \supset A$ saadaan

$$\|\partial E\|(A) \leq \|\partial(\mathbb{R}^n \setminus E)\|(A).$$

Vastakkainen epäyhtälö voidaan näyttää täsmälleen samaan tapaan, joten yhteensä

$$\|\partial E\|(A) = \|\partial(\mathbb{R}^n \setminus E)\|(A),$$

eli mitat ovat samat.

Todistetaan sitten, että $\nu_E = -\nu_{\mathbb{R}^n \setminus E}$ $\|\partial E\|$-m.k. $\mathbb{R}^n$:ssä. Tässä voitaisiin vedota kaavaan (2.2) ja tulokseen, jonka mukaan merkkinen mitta on nolla, jos jokaisen C_0^1-funktion integraali merkkisen mitan suhteen on nolla [8, s. 228]. Esitetään tässä kuitenkin toinen, perimetrimitan määritelmään perustuva todistus. Tehdään vastaoletus: $\|\partial E\|(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \nu_E(x) \neq -\nu_{\mathbb{R}^n \setminus E}(x)\}) > 0$. Tästä seuraa

$$\|\partial E\| \left(\left\{x \in B(0,r) \,|\, |\nu_E(x) - (-\nu_{\mathbb{R}^n \setminus E}(x))| > 1/k\right\}\right) = \alpha > 0 \tag{2.3}$$

jollain $r > 0$ ja $k \in \mathbb{N}$. Nyt kuitenkin perimetrimitan määritelmän nojalla voidaan valita jono (φ_i), $\varphi_i \in C_0^1(B(0,r); \mathbb{R}^n)$ ja $|\varphi_i| \leq 1$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, s.e.

$$\int_{B(0,r)} \varphi_i \cdot \nu_E \, d\|\partial E\| \to \|\partial E\|(B(0,r)) = \int_{B(0,r)} \nu_E \cdot \nu_E \, d\|\partial E\|,$$

kun $i \to \infty$, ja yhtälön (2.2) nojalla myös (muistetaan, että mitat ovat samat)

$$\int_{B(0,r)} \varphi_i \cdot (-\nu_{\mathbb{R}^n \setminus E}) \, d\|\partial E\| \to \|\partial E\|(B(0,r)) = \int_{B(0,r)} \nu_{\mathbb{R}^n \setminus E} \cdot \nu_{\mathbb{R}^n \setminus E} \, d\|\partial E\|,$$

kun $i \to \infty$. Koska toisaalta kahden yksikkövektorin sisätulo lähestyy yhtä vain, kun vektorit lähestyvät toisiaan euklidisen normin mielessä, saadaan

$$\begin{cases} \|\partial E\|(\{x \in B(0,r) \,|\, |\varphi_i(x) - \nu_E(x)| > 1/(3k)\}) \to 0, \\ \|\partial E\|(\{x \in B(0,r) \,|\, |\varphi_i(x) - (-\nu_{\mathbb{R}^n \setminus E}(x))| > 1/(3k)\}) \to 0, \end{cases}$$

kun $i \to \infty$. Tämä on kuitenkin selvästi ristiriidassa yhtälön (2.3) kanssa. Siis $\nu_E = -\nu_{\mathbb{R}^n \setminus E}$ $\|\partial E\|$-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$. Nyt saadaan redusoidun reunan määritelmän perusteella, että E:n ja $\mathbb{R}^n \setminus E$:n redusoidut reunat koostuvat täsmälleen samoista pisteistä. $\square$

2.2 Epäyhtälöitä

Todistetaan aluksi yksinkertainen lemma, jota tarvitaan jatkossa.

Lemma 2.2.1. *Jos μ on Radon-mitta $\mathbb{R}^n$:ssä ja $x \in \mathbb{R}^n$, niin $\mu(\partial \bar{B}(x,L)) = 0$ kaikilla paitsi korkeintaan numeroituvan monella $L > 0$.*

Todistus. Oletetaan, että $\mu(\partial \bar{B}(x,L)) > 0$ ylinumeroituvan monella $L > 0$. Tällöin jollain välillä $[i, i+1)$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on myös oltava ylinumeroituvan monta tällaista $L > 0$. Määritellään sitten jokaista $j \in \mathbb{Z}$ kohti joukko

$$A_j = \{L \in [i, i+1) \,|\, \mu(\bar{B}(x,L)) \in [2^j, 2^{j+1})\}$$

Edelleen jokin joukko A_j on ylinumeroituva. Poimitaan tällaisesta A_j:stä numeroituvasti ääretön osajoukko $\tilde{A}_j \subset A_j$. Koska μ on Radon-mitta, ovat pallonkuoret aina μ-mitallisia joukkoja, ja voidaan laskea

$$\begin{aligned}\mu(B(x,i+1) \setminus B(x,i)) &\geq \mu\left(\bigcup_{L \in \tilde{A}_j} \partial \bar{B}(x,L)\right) \\ &= \sum_{L \in \tilde{A}_j} \mu(\partial \bar{B}(x,L)) \geq \sum_{L \in \tilde{A}_j} 2^j = \infty,\end{aligned}$$

mikä on ristiriita, koska rajoitettujen joukkojen Radon-mitat ovat aina äärellisiä. □

Todistetaan nyt lemma, jota tullaan tarvitsemaan, kun todistetaan epäyhtälöitä redusoidun reunan pisteille. Tulos on käytännössä osittaisintegrointikaava BV-funktioille tilanteessa, jossa sileän funktion φ kantaja ei sisälly integrointialueeseen.

Lemma 2.2.2. *Olkoon joukolla $E \subset \mathbb{R}^n$ lokaalisti äärellinen perimetri $\mathbb{R}^n$:ssä, ja olkoon $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Silloin kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja m.k. $r > 0$ pätee*

$$\int_{\bar{B}(x,r)} \chi_E \nabla \cdot \varphi \, dy = \int_{\bar{B}(x,r)} \varphi \cdot \nu_E \, d\|\partial E\| + \int_{\partial \bar{B}(x,r)} \chi_E \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

missä ν on pallon reunan $\partial \bar{B}(x,r)$ yksikköulkonormaali.

Todistus. Kaikilla $r > 0$ pallo $B(x,r)$ on avoin ja rajoitettu joukko, jonka reuna on Lipschitz. Lisäksi $\chi_E \in BV(B(x,r))$. Siis kaikilla $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ pätee [1, s. 177][3, s. 37]

$$\int_{B(x,r)} \chi_E \nabla \cdot \varphi \, dy = \int_{B(x,r)} \varphi \cdot \nu_E \, d\|\partial E\| + \int_{\partial \bar{B}(x,r)} T\chi_E(\varphi \cdot \nu) \, d\mathcal{H}^{n-1}, \quad (2.4)$$

missä $T\chi_E \in L^1(\partial \bar{B}(x,r), \mathcal{H}^{n-1})$ on funktion χ_E *jälki* reunalla $\partial \bar{B}(x,r)$, ja ν on pallon reunan $\partial \bar{B}(x,r)$ yksikköulkonormaali. Jäljelle pätee [1, s. 181][3, s. 37]

$$T\chi_E(z) = \lim_{\rho \to 0} \fint_{\bar{B}(z,\rho) \cap B(x,r)} \chi_E dy$$

$\mathcal{H}^{n-1}$-m.k. $z \in \partial \bar{B}(x,r)$, kaikilla $r > 0$. Toisaalta Lebesguen lause lokaalisti integroituville funktioille antaa

$$\chi_E(z) = \lim_{\rho \to 0} \fint_{\bar{B}(z,\rho) \cap B(x,r)} \chi_E dy$$

$\mathcal{L}^n$-m.k. $z \in \mathbb{R}^n$ s.e. $z \in \partial \bar{B}(x,r)$ — eli $\mathcal{H}^{n-1}$-m.k. $z \in \partial \bar{B}(x,r)$, m.k. $r > 0$. Siis pätee $T\chi_E(z) = \chi_E(z)$ $\mathcal{H}^{n-1}$-m.k. $z \in \partial \bar{B}(x,r)$, m.k. $r > 0$. Täten yhtälö (2.4) saadaan m.k. $r > 0$ muotoon

$$\int_{B(x,r)} \chi_E \nabla \cdot \varphi \, dy = \int_{B(x,r)} \varphi \cdot \nu_E \, d\|\partial E\| + \int_{\partial \bar{B}(x,r)} \chi_E \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

mikä on sama kuin väite, paitsi että pallot ovat avoimia. Lemman 2.2.1 perusteella väite kuitenkin seuraa. $\square$

Todistetaan sitten joukko redusoidun reunan pisteisiin liittyviä epäyhtälöitä (muistetaan, että $E \subset \mathbb{R}^n$ on joukko, jolla on lokaalisti äärellinen perimetri $\mathbb{R}^n$:ssä).

Lemma 2.2.3. *On olemassa vain dimensiosta n riippuvat, aidosti nollaa suuremmat vakiot $C_1(n), \ldots, C_3(n)$ s.e. kaikilla $x \in \partial^* E$ pätee*

$$(i) \quad \liminf_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} \geq C_1(n),$$

$$(ii) \quad \liminf_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n((\mathbb{R}^n \setminus E) \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} \geq C_1(n),$$

$$(iii) \quad \liminf_{r \to 0} \frac{\|\partial E\|(\bar{B}(x,r))}{r^{n-1}} \geq C_2(n),$$

$$(iv) \quad \limsup_{r \to 0} \frac{\|\partial E\|(\bar{B}(x,r))}{r^{n-1}} \leq C_3(n).$$

Todistus. Otetaan mikä tahansa $x \in \partial^* E$. Väitteen (i) todistamiseksi määritellään ensin funktio

$$m(r) := \mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x,r)) = \int_0^r \mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial \bar{B}(x,s)) \, ds.$$

Jälkimmäinen yhtäsuuruus seuraa coarea-kaavasta. Tässä tietenkin $m(r) < \infty$ kaikilla $r > 0$, ja $\mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial \bar{B}(x,s))$ on s:n funktiona lokaalisti integroituva. Tämän perusteella $m(r)$ on absoluuttisesti jatkuva funktio (ks. esimerkiksi [4, s. 544–]), ja Lebesguen lauseen mukaan

$$\begin{aligned} m'(r) &= \lim_{h \to 0} \frac{m(r+h) - m(r)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_r^{r+h} \mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial \bar{B}(x,s)) \, ds \\ &= \mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial \bar{B}(x,r)) \qquad \text{m.k. } r > 0. \end{aligned}$$

Alla olevan kaavan (2.6) perusteella joukolla $E \cap \bar{B}(x,r)$ on äärellinen perimetri $\mathbb{R}^n$:ssä. Tähän joukkoon voidaan täten soveltaa isoperimetristä epäyhtälöä [1, s. 190–191]:

$$m(r)^{1-1/n} = \mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x,r))^{1-1/n} \le A_1(n)\|\partial(E \cap \bar{B}(x,r))\|(\mathbb{R}^n). \tag{2.5}$$

(Tässä tekstissä merkitään isoperimetrisissä epäyhtälöissä esiintyviä vakioita $A_1(n)$ ja $A_2(n)$, ks. [1, s. 191].) Nyt voidaan jatkaa lemman 2.2.2 avulla. Otetaan tämän lemman väitteessä supremum yli funktioiden $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $|\varphi| \le 1$. Väitteen vasempaan puoleen voidaan soveltaa yksinkertaisesti perimetrimitan määritelmää, kun taas oikealla puolella muistetaan, että $|\nu_E| = 1$ $\|\partial E\|$-m.k., $|\nu| = 1$ ja $|\varphi| \le 1$. Näin saadaan yhteensä

$$\begin{aligned}\|\partial(E \cap \bar{B}(x,r))\|(\mathbb{R}^n) &\le \int_{\bar{B}(x,r)} d\|\partial E\| + \int_{E\cap\partial\bar{B}(x,r)} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \|\partial E\|(\bar{B}(x,r)) + \mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial\bar{B}(x,r))\end{aligned} \tag{2.6}$$

m.k. $r > 0$. Tämän epäyhtälön jälkimmäistä riviä voidaan edelleen muokata lemman 2.2.2 avulla. Valitaan tällä kertaa funktio $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, joka saa pallossa $\bar{B}(x,r)$ vakioarvon $\nu_E^*(x)$ (muistetaan $\nu_E^*(x)$ redusoidun reunan määritelmästä). Tällainen funktio saadaan tietenkin helposti esimerkiksi silottamalla funktio $\nu_E^*(x)\chi_{\bar{B}(x,2r)}$. Nyt $\nabla \cdot \varphi = 0$ pallossa $\bar{B}(x,r)$, joten lemma 2.2.2 antaa

$$\begin{aligned}\int_{\bar{B}(x,r)} \nu_E^*(x) \cdot \nu_E \, d\|\partial E\| &= -\int_{E\cap\partial\bar{B}(x,r)} \nu_E^*(x) \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\le \mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial\bar{B}(x,r))\end{aligned} \tag{2.7}$$

m.k. $r > 0$. Nyt vasta käytetään tietoa $x \in \partial^* E$, joka antaa

$$\lim_{r\to 0} \nu_E^*(x) \cdot \fint_{\bar{B}(x,r)} \nu_E \, d\|\partial E\| = \nu_E^*(x) \cdot \nu_E^*(x) = 1.$$

Täten

$$\nu_E^*(x) \cdot \fint_{\bar{B}(x,r)} \nu_E d\|\partial E\| \ge \frac{1}{2},$$

kun $r \le R$ sopivalla $R > 0$. Luku R voi riippua pisteestä, mutta tässähän piste $x \in \partial^* E$ on kiinnitetty. Siis

$$\int_{\bar{B}(x,r)} \nu_E^*(x) \cdot \nu_E \, d\|\partial E\| \ge \frac{1}{2}\|\partial E\|(\bar{B}(x,r))$$

kaikilla $r \in (0,R)$. Yhdistämällä tämä epäyhtälöön (2.7) saadaan

$$\frac{1}{2}\|\partial E\|(\bar{B}(x,r)) \le \mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial\bar{B}(x,r)) \quad \text{m.k. } r \in (0,R). \tag{2.8}$$

Tämä ja epäyhtälö (2.6) antavat yhteensä

$$\|\partial(E \cap \bar{B}(x,r)\|(\mathbb{R}^n) \le 3\mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial\bar{B}(x,r)) \quad \text{m.k. } r \in (0,R).$$

Epäyhtälön (2.5) avulla saadaan siis

$$m(r)^{1-1/n} \leq 3A_1(n)\mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial \bar{B}(x,r)) = C(n)m'(r) \quad \text{m.k. } r \in (0,R),$$

missä merkittiin $3A_1(n) = C(n) > 0$. Siispä

$$\frac{1}{C(n)} \leq m(r)^{(1/n)-1}m'(r) = q(m(r))m'(r) \quad \text{m.k. } r \in (0,R),$$

missä $q(s) := s^{(1/n)-1},\ s \geq 0$. Selvästi $q \in L^1(0,t)$ kaikilla $t > 0$. Koska m on kasvava absoluuttisesti jatkuva funktio, pätee [4, s. 560]

$$\int_0^r q(m(s))m'(s)\,ds = \int_{m(0)}^{m(r)} q(s)ds.$$

Tässä oikea puoli on

$$\int_0^{m(r)} s^{(1/n)-1}\,ds = nm(r)^{1/n},$$

ja vasen puoli on edellisen epäyhtälön perusteella vähintään yhtä suuri kuin $r/C(n)$, kunhan $r < R$. Lopputuloksena saadaan $m(r)^{1/n} \geq r/C(n)$ kaikilla $r \in (0,R)$ (integroinnin jälkeen ei enää tarvita määrettä ”melkein kaikilla”). Kun muistetaan $m(r)$:n määritelmä, saadaan yhteensä

$$\frac{\mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} = \frac{m(r)}{r^n} \geq \frac{1}{(C(n))^n} \quad \text{kaikilla } r \in (0,R).$$

Väite (i) siis pätee esimerkiksi vakiolla $C_1(n) = 1/(C(n))^n > 0$. Väite (ii) puolestaan saadaan väitteestä (i) lemman 2.1.2 avulla. Koska E:llä on lokaalisti äärellinen perimetri $\mathbb{R}^n$:ssä, myös $\mathbb{R}^n \backslash E$:llä on, ja koska $x \in \partial^* E$, myös $x \in \partial^*(\mathbb{R}^n \backslash E)$. Siis kohdan (i) todistus toimii yhtä hyvin joukolle $\mathbb{R}^n \backslash E$, ja tämä antaa väitteen (ii).

Väitteen (iii) todistamiseksi todetaan, että relatiivisen isoperimetrisen epäyhtälön [1, s. 190–191] mukaan

$$\min\{\mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x,r)), \mathcal{L}^n((\mathbb{R}^n \backslash E) \cap \bar{B}(x,r))\}^{1-1/n} \leq 2A_2(n)\|\partial E\|(\bar{B}(x,r)).$$

Tässä $A_2(n) > 0$ (näin voidaan tietenkin joka tapauksessa valita). Tästä ja kohdista (i) ja (ii) seuraa nyt

$$\begin{aligned}
&\liminf_{r\to 0} \frac{\|\partial E\|(\bar{B}(x,r))}{r^{n-1}} \\
&\quad \geq \frac{1}{2A_2(n)} \liminf_{r\to 0} \min\left\{\frac{\mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x,r))}{r^n}, \frac{\mathcal{L}^n((\mathbb{R}^n \backslash E) \cap \bar{B}(x,r))}{r^n}\right\}^{1-1/n} \\
&\quad \geq \frac{1}{2A_2(n)} C_1(n)^{1-1/n} =: C_2(n) > 0.
\end{aligned}$$

Kohta (iii) on näin todistettu. Lopuksi palautetaan mieleen, että epäyhtälön (2.8) nojalla

$$\|\partial E\|(\bar{B}(x,r)) \le 2\mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial\bar{B}(x,r)) \le 2\mathcal{H}^{n-1}(\partial\bar{B}(x,r)) = 2\omega_{n-1}r^{n-1}$$

m.k. $r \in (0,R)$. Huomataan, että kun epäyhtälö esitetään tässä muodossa, rajoituksesta "melkein kaikilla" päästään eroon seuraavalla tavalla: Otetaan mielivaltainen $r \in (0,R)$. Tällöin on olemassa jono $h_i \to 0$ s.e.

$$\|\partial E\|(\bar{B}(x,r+h_i)) \le 2\omega_{n-1}(r+h_i)^{n-1}$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Nyt pätee

$$\|\partial E\|(\bar{B}(x,r)) = \lim_{i\to\infty} \|\partial E\|(\bar{B}(x,r+h_i)) \le 2\omega_{n-1}r^{n-1}.$$

Tämä siis pätee jokaisella $r \in (0,R)$, mistä saadaan suoraan

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\|\partial E\|(\bar{B}(x,r))}{r^{n-1}} \le 2\omega_{n-1} =: C_3(n).$$

Tämä onkin väite (iv). □

2.3 Joukko redusoidun reunansa lähellä

Olkoon E edelleen joukko, jolla on lokaalisti äärellinen perimetri $\mathbb{R}^n$:ssä. Kaikkia redusoidun reunan pisteitä $x \in \partial^* E$ kohti määritellään hypertaso

$$H(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, \nu_E^*(x)\cdot(y-x) = 0\}$$

ja puoliavaruudet

$$H^-(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, \nu_E^*(x)\cdot(y-x) \le 0\},$$
$$H^+(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, \nu_E^*(x)\cdot(y-x) \ge 0\}.$$

Edelleen jokaista $x \in \partial^* E$ ja $r > 0$ kohti määritellään

$$E_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, x + r(y-x) \in E\}.$$

Huomataan, että $E_1(x) = E$, ja kun $r \to 0$, joukko $E_r(x)$ "räjähtää" pisteen x suhteen. Koska siis $E_r(x)$ on käytännössä vain r:llä skaalattu versio E:stä, näiden joukkojen perimetrimitoille saadaan yksinkertaiset riippuvuudet. Määritellään ensin funktio

$$p_r(y) := x + \frac{y-x}{r}.$$

Suoraan $E_r(x)$:n määritelmästä voidaan todeta, että $p_r(y) \in E_r(x)$ täsmälleen silloin, kun $y \in E$. Jos $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, käyttämällä muuttujanvaihtoa $z = p_r(y)$ voidaan nyt laskea

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_r(x)}(z)\nabla\cdot\varphi(z)\,dz &= \frac{1}{r^n}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_r(x)}(x+(y-x)/r)\nabla\cdot\varphi(x+(y-x)/r)\,dy \\ &= \frac{1}{r^{n-1}}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(y)\nabla\cdot(\varphi\circ p_r(y))\,dy. \qquad (2.9)\end{aligned}$$

Olkoon sitten $L > 0$, ja $\varphi \in C_0^1(B(x,L);\mathbb{R}^n)$. Kuvaus $\varphi \to \varphi\circ p_r$ on selvästi bijektio $C_0^1(B(x,L);\mathbb{R}^n)$:n ja $C_0^1(B(x,rL);\mathbb{R}^n)$:n välillä. Yllä olevasta yhtälöstä saadaan täten perimetrimitan määritelmän nojalla

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_r(x)}(z)\nabla\cdot\varphi(z)\,dz \le \frac{1}{r^{n-1}}\|\partial E\|(B(x,rL))$$

kaikilla $\varphi \in C_0^1(B(x,L);\mathbb{R}^n)$, $|\varphi| \le 1$. Tästä nähdään, että myös joukolla $E_r(x)$ on lokaalisti äärellinen perimetri $\mathbb{R}^n$:ssä. Jos nyt otetaan supremum epäyhtälön vasemmalta puolelta, saadaan

$$\|\partial E_r(x)\|(B(x,L)) \le \frac{1}{r^{n-1}}\|\partial E\|(B(x,rL)).$$

Tekemällä sama päättely toiseen suuntaan saadaan yhtäsuuruus:

$$\|\partial E_r(x)\|(B(x,L)) = \frac{1}{r^{n-1}}\|\partial E\|(B(x,rL)).$$

Tässä siis pallot ovat avoimia. Kuitenkin, antamalla $\varepsilon \to 0$ yhtälössä

$$\|\partial E_r(x)\|(B(x,L+\varepsilon)) = \frac{1}{r^{n-1}}\|\partial E\|(B(x,r(L+\varepsilon)))$$

saadaan tulos suljetuille palloille:

$$\|\partial E_r(x)\|(\bar{B}(x,L)) = \frac{1}{r^{n-1}}\|\partial E\|(\bar{B}(x,rL)). \qquad (2.10)$$

Toisaalta BV-funktioiden struktuurilauseen avulla saadaan yhtälöstä (2.9) muoto

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\cdot\nu_{E_r(x)}\,d\|\partial E_r(x)\| = \frac{1}{r^{n-1}}\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi\circ p_r)\cdot\nu_E\,d\|\partial E\|.$$

Valitaan nyt jono funktioita $\tilde{\varphi}_i \in C_0^1(B(x,L+1/i))$ s.e. $|\tilde{\varphi}_i| \le 1$ ja $\tilde{\varphi}_i = 1$ pallossa $\bar{B}(x,L)$ jokaisella $i \in \mathbb{N}$. Asettamalla tämä jono nyt vuoron perään funktion $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ yhdeksi komponentiksi ja pitämällä muut komponentit nollina, saadaan lopulta

$$\int_{\bar{B}(x,L)} \nu_{E_r(x)}\,d\|\partial E_r(x)\| = \frac{1}{r^{n-1}}\int_{\bar{B}(x,rL)} \nu_E\,d\|\partial E\|. \qquad (2.11)$$

Yhtälöt (2.10) ja (2.11) kertovat täten E:n ja E_r:n perimetrimittojen välisen suhteen suljettujen pallojen tapauksessa.

Nyt päästään osoittamaan, että pisteen $x \in \partial^* E$ lähellä E on suunnilleen puoliavaruus, jonka yksikköulkonormaali on juuri $\nu_E^*(x)$.

Lause 2.3.1. *Olkoon $x \in \partial^* E$. Silloin $\chi_{E_r(x)} \to \chi_{H^-(x)}$ $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$:ssä ja*

$$\|\partial E_r(x)\|(\bar{B}(x, L)) \to \|\partial H^-(x)\|(\bar{B}(x, L)) = \Omega_{n-1} L^{n-1}$$

kaikilla $L > 0$, kun $r \to 0$.

Todistus. Siirtämällä ja kiertämällä koordinaatistoa tarpeen mukaan voidaan olettaa, että $x = 0$, $\nu_E^*(0) = e_n = (0, \ldots, 0, 1)$, ja siten

$$\begin{cases} H(0) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_n = 0\}, \\ H^-(0) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_n \leq 0\}, \\ H^+(0) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_n \geq 0\}. \end{cases}$$

Edelleen $E_r(0) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid ry \in E\}$. Valitaan nyt mikä tahansa jono $r_j \to 0$. Olisi siis osoitettava, että $\chi_{E_{r_j}(0)} \to \chi_{H^-(0)}$ $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$:ssä. Osoitetaan ensin, että $\chi_{E_{r_j}(0)}$ on rajoitettu jono avaruudessa $BV(B(0, i))$ millä tahansa $i \in \mathbb{N}$. Selvästi

$$\|\chi_{E_{r_j}(0)}\|_{L^1(B(0,i))} \leq \mathcal{L}^n(B(0, i)) < \infty$$

kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Yhtälön (2.10) nojalla saadaan

$$\|\partial E_r(0)\|(B(0, i)) \leq \frac{1}{r^{n-1}} \|\partial E\|(\bar{B}(0, ri)).$$

Lemman 2.2.3 kohdan (iv) perusteella yllä olevan epäyhtälön oikea puoli on arvoilla $r \in (0, \varepsilon)$, missä $\varepsilon > 0$, pienempi kuin $2i^{n-1} C_3(n)$. Myös arvoilla $r \in [\varepsilon, \max(r_j)]$ oikea puoli on pienempi kuin jokin vakio $C < \infty$, sillä $\|\partial E\|$ on Radon-mitta. Yhteensä saadaan, että

$$\|\partial E_{r_j}(0)\|(B(0, i)) \leq C < \infty$$

kaikilla $j \in \mathbb{N}$, missä vakio C voi riippua joukosta E, pisteestä (joka tässä oletetaan origoksi), i:stä, n:stä ja jonon (r_j) maksimiarvosta — mutta ei kuitenkaan j:stä. Täten

$$\|\chi_{E_{r_j}(0)}\|_{BV(B(0,i))} = \|\chi_{E_{r_j}(0)}\|_{L^1(B(0,i))} + \|\partial E_{r_j}(0)\|(B(0, i)) \leq C < \infty$$

kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Nyt kompaktisuustuloksen [1, s. 176] perusteella on olemassa osajono $(r_{1k})_{k=1}^\infty \subset (r_j)$ ja funktio $f_i \in BV(B(0, i))$ s.e. $\chi_{E_{r_{1k}}(0)} \to f_i$ $L^1(B(0, i))$:ssä. Valitsemalla tarpeen mukaan osajonon osajono, jota edelleen merkitään (r_{1k}), voidaan olettaa, että $\chi_{E_{r_{1k}}(0)} \to f_i$ myös $\mathcal{L}^n$-m.k. $B(0,i)$:ssä. Nyt edelleen $(\chi_{E_{r_{1k}}(0)})_{k=1}^{\infty}$ on rajoitettu jono $BV(B(0,i+1))$:ssä (perustellaan samaan tapaan kuin yllä), joten kompaktisuuden perusteella tämän osajono $(\chi_{E_{r_{2k}}(0)})$ suppenee $L^1(B(0,i+1))$:ssä ja $\mathcal{L}^n$-m.k. $B(0,i+1)$:ssä kohti funktiota $f_{i+1} \in BV(B(0,i+1))$. Koska toisaalta myös $\chi_{E_{r_{2k}}(0)} \to f_i$ $L^1(B(0,i))$:ssä, on oltava $f_{i+1} = f_i$ $\mathcal{L}^n$-m.k. $B(0,i)$:ssä.

Jatkamalla näin voidaan määritellä funktio $f \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ s.e. $f = f_i$ $\mathcal{L}^n$-m.k. $B(0,i)$:ssä jokaisella $i \in \mathbb{N}$. Lopulta saadaan, että "diagonaalinen jono" $(\chi_{E_{r_{kk}}(0)})_{k=1}^{\infty}$ suppenee $L^1(B(0,i))$:ssä ja $\mathcal{L}^n$-m.k. $B(0,i)$:ssä kohti funktiota $f|_{B(0,i)} \in BV(B(0,i))$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Merkitään $s_k := r_{kk}$. Koska $\mathcal{L}^n$-m.k. $y \in \mathbb{R}^n$ pätee $\chi_{E_{s_k}(0)}(y) \in \{0,1\}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, nämä jonot voivat lähestyä vain arvoja 0 ja 1. Täten $f = \chi_F$ avaruudessa $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, ja siten avaruudessa $BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, jollain $F \subset \mathbb{R}^n$. Kaiken kaikkiaan siis $\chi_{E_{s_k}(0)} \to \chi_F$ $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$:ssä, missä $\chi_F \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, eli toisin sanoen F:llä on lokaalisti äärellinen perimetri $\mathbb{R}^n$:ssä. Vielä pitäisi todistaa, että joukko F on juuri toivottu puoliavaruus.

Käyttämällä ensin BV-funktioiden struktuurilausetta, sitten tietoa $\chi_{E_{s_k}(0)} \to \chi_F$ $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$:ssä, ja lopuksi uudelleen BV-funktioiden struktuurilausetta, saadaan millä tahansa $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \nu_{E_{s_k}(0)}\, d\|\partial E_{s_k}(0)\| &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_{s_k}(0)} \nabla \cdot \varphi\, dy \\ &\to \int_{\mathbb{R}^n} \chi_F \nabla \cdot \varphi\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \nu_F\, d\|\partial F\|,\end{aligned}$$

kun $k \to \infty$. Tämä tarkoittaa [1, s. 54], että $\|\partial E_{s_k}(0)\| \llcorner \nu_{E_{s_k}(0)} \rightharpoonup \|\partial F\| \llcorner \nu_F$ (Radon-mittojen heikko suppeneminen), missä siis (kirjoitetaan $E_{s_k}(0)$ tästä lähtien lyhyemmin E_{s_k})

$$\|\partial E_{s_k}\| \llcorner \nu_{E_{s_k}}(B) = \int_B \nu_{E_{s_k}}\, d\|\partial E_{s_k}\|$$

kaikilla Borel-joukoilla $B \subset \mathbb{R}^n$. Todettu heikko suppeneminen antaa kaikilla $L > 0$, joilla $\|\partial F\|(\partial \bar{B}(0,L)) = 0$, että [1, s. 54]

$$\int_{\bar{B}(0,L)} \nu_{E_{s_k}}\, d\|\partial E_{s_k}\| \to \int_{\bar{B}(0,L)} \nu_F\, d\|\partial F\|, \tag{2.12}$$

kun $k \to \infty$. Lemman 2.2.1 mukaan $\|\partial F\|(\partial \bar{B}(0,L)) = 0$ kaikilla paitsi korkeintaan numeroituvan monella $L > 0$. Kaiken kaikkiaan on siis saatu toinenkin tapa, jolla joukko E_{s_k} "lähestyy" joukkoa F.

Käyttämällä nyt ensin yhtälöitä (2.10) ja (2.11) ja sitten tietoa, että $0 \in \partial^* E$, saadaan

$$\lim_{k\to\infty} \fint_{\bar{B}(0,L)} \nu_{E_{s_k}} d\|\partial E_{s_k}\| = \lim_{k\to\infty} \frac{\int_{\bar{B}(0,L)} \nu_{E_{s_k}} d\|\partial E_{s_k}\|}{\|\partial E_{s_k}\|(\bar{B}(0,L))}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{s_k^{n-1}} \int_{\bar{B}(0,s_kL)} \nu_E \, d\|\partial E\|}{\frac{1}{s_k^{n-1}} \|\partial E\|(\bar{B}(0,s_kL))} = \lim_{k\to\infty} \fint_{\bar{B}(0,s_kL)} \nu_E d\|\partial E\| = \nu_E^*(0) = e_n$$

kaikilla $L > 0$. Intuitiivisesti tämä kertoo, että $\nu_{E_{s_k}}$ on lähellä e_n:ää, kun k kasvaa suureksi. Ottamalla nyt sisätulo e_n:n kanssa saadaan

$$\lim_{k\to\infty} e_n \cdot \fint_{\bar{B}(0,L)} \nu_{E_{s_k}} \, d\|\partial E_{s_k}\| = 1. \tag{2.13}$$

Toisaalta kaavan (2.12) nojalla

$$\int_{\bar{B}(0,L)} \nu_{E_{s_k}} \, d\|\partial E_{s_k}\| \to \int_{\bar{B}(0,L)} \nu_F \, d\|\partial F\|$$

m.k. $L > 0$, kun $k \to \infty$. Kun tämä yhdistetään yhtälöön (2.13), voidaan todeta, että on myös oltava

$$\lim_{k\to\infty} \|\partial E_{s_k}\|(\bar{B}(0,L)) = \int_{\bar{B}(0,L)} e_n \cdot \nu_F \, d\|\partial F\| \tag{2.14}$$

m.k. $L > 0$. Toisaalta alaspäin puolijatkuvuuden [1, s. 172] nojalla

$$\begin{aligned} \|\partial F\|(B(0,L)) &\le \liminf_{k\to\infty} \|\partial E_{s_k}\|(B(0,L)) \\ &\le \liminf_{k\to\infty} \|\partial E_{s_k}\|(\bar{B}(0,L)) \\ &= \lim_{k\to\infty} \|\partial E_{s_k}\|(\bar{B}(0,L)) \end{aligned} \tag{2.15}$$

m.k. $L > 0$. Yhdistämällä tämä yhtälöön (2.14) ja muistamalla, että m.k. $L > 0$ pätee $\|\partial F\|(\partial \bar{B}(0,L)) = 0$, saadaan

$$\|\partial F\|(\bar{B}(0,L)) = \|\partial F\|(B(0,L)) \le \int_{\bar{B}(0,L)} e_n \cdot \nu_F \, d\|\partial F\|$$

m.k. $L > 0$. On siis välttämättä oltava $\nu_F = e_n$ $\|\partial F\|$-m.k. $y \in \bar{B}(0,L)$ m.k. $L > 0$. Täten $\nu_F = e_n$ $\|\partial F\|$-m.k. $y \in \mathbb{R}^n$. Kaava (2.14) antaa nyt myös

$$\lim_{k\to\infty} \|\partial E_{s_k}\|(\bar{B}(0,L)) \to \|\partial F\|(\bar{B}(0,L)) \tag{2.16}$$

m.k. $L > 0$ (tarkalleen niillä, joille pätee $\|\partial F\|(\partial \bar{B}(0,L)) = 0$). Nyt päästään vihdoin osoittamaan, että joukko F on halutunlainen puolitaso. Tämän todistamisessa käytetään apuna χ_F:n silotettua muotoa $(\chi_F)^\varepsilon = \eta_\varepsilon * \chi_F$, $\varepsilon > 0$, missä

η_ε on standardisilottajafunktio [1, s. 122]. Käyttämällä konvoluution määritelmää, Fubinin lausetta, tietoa, että sileän funktion osittaisderivaatan silotus on funktion silotuksen osittaisderivaatta, ja vielä BV-funktioiden struktuurilausetta, saadaan kaikille $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (\chi_F)^\varepsilon \nabla \cdot \varphi \, dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_F(z)\eta_\varepsilon(y-z)dz \, \nabla \cdot \varphi(y) \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y-z)\nabla \cdot \varphi(y)dy \, \chi_F(z) \, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla \cdot \varphi)^\varepsilon(z)\chi_F(z) \, dz = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \cdot \varphi^\varepsilon(z)\chi_F(z) \, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^\varepsilon \cdot \nu_F \, d\|\partial F\| = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^\varepsilon \cdot e_n \, d\|\partial F\| \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi \cdot e_n)^\varepsilon \, d\|\partial F\|.
\end{aligned}$$

Toisaalta osittaisintegroimalla saadaan myös kaikille $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\chi_F)^\varepsilon \nabla \cdot \varphi \, dy = -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla(\chi_F)^\varepsilon \cdot \varphi \, dy.$$

Oletetaan nyt, että $\frac{\partial(\chi_F)^\varepsilon}{\partial y_n}(y) > 0$ jollain $y \in \mathbb{R}^n$. Tällöin osittaisderivaattojen jatkuvuuden perusteella $\frac{\partial(\chi_F)^\varepsilon}{\partial y_n} > \delta > 0$ avoimessa joukossa $U \subset \mathbb{R}^n$ ja edelleen kompaktissa joukossa $K \subset U$ s.e. $\mathcal{L}^n(K) > 0$ (K voi olla esimerkiksi U:n sisältämä suljettu pallo). Jos nyt valitaan sileä $\tilde{\varphi} \in C_0^1(U)$, jolle pätee $\tilde{\varphi} \geq 0$ ja $\tilde{\varphi} \equiv 1$ K:ssa, saadaan

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial(\chi_F)^\varepsilon}{\partial y_n}\tilde{\varphi} \, dy < 0.$$

Jos edelleen valitaan $\varphi = (0, \ldots 0, \tilde{\varphi}) \in C_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, niin

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \nabla(\chi_F)^\varepsilon \cdot \varphi \, dy < 0.$$

Samaan aikaan kuitenkin

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi \cdot e_n)^\varepsilon \, d\|\partial F\| \geq 0,$$

sillä φ:n n:s komponentti on ei-negatiivinen. On siis päädytty ristiriitaan, ja voidaan päätellä, että $\frac{\partial(\chi_F)^\varepsilon}{\partial y_n}(y) \leq 0$ kaikilla $y \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan sitten, että $\frac{\partial(\chi_F)^\varepsilon}{\partial y_i}(y) > 0$ jollain $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ ja $y \in \mathbb{R}^n$. Nyt saadaan samaan tyyliin kuin äsken, että

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial(\chi_F)^\varepsilon}{\partial y_i}\tilde{\varphi} \, dy < 0$$

jollain $\tilde{\varphi} \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{\varphi} \geq 0$. Valitsemalla edelleen funktio $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, jonka i:s komponentti on $\tilde{\varphi}$ ja muut nollia, saadaan

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \nabla(\chi_F)^\varepsilon \cdot \varphi \, dy < 0,$$

mutta toisaalta

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi \cdot e_n)^\varepsilon \, d\|\partial F\| = 0,$$

mikä on ristiriita. Samaan tyyliin tapaus $\frac{\partial(\chi_F)^\varepsilon}{\partial y_i}(y) < 0$ jollain $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ ja $y \in \mathbb{R}^n$ tuottaa ristiriidan. On siis oltava $\frac{\partial(\chi_F)^\varepsilon}{\partial y_i}(y) = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $y \in \mathbb{R}^n$ ja $\varepsilon > 0$. Jos nyt $\varepsilon_j \to 0$, niin $(\chi_F)^{\varepsilon_j} \to \chi_F$ $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$:ssä ja (jos tarvittaessa siirrytään osajonoon) pisteittäin joukossa $\mathbb{R}^n \setminus A$, $\mathcal{L}^n(A) = 0$ [1, s. 123]. Jos $y, z \in \mathbb{R}^n \setminus A$ ja $y_n = z_n$, niin $(\chi_F)^\varepsilon(y) = (\chi_F)^\varepsilon(z)$ kaikilla $\varepsilon > 0$, ja täten raja-arvotkin ovat samat, eli $\chi_F(y) = \chi_F(z)$. Vastaavasti, jos $y_n < z_n$, niin $(\chi_F)^\varepsilon(y) \geq (\chi_F)^\varepsilon(z)$ kaikilla $\varepsilon > 0$, ja täten $\chi_F(y) \geq \chi_F(z)$. Joukko F on siis muotoa ($\mathcal{L}^n$-nollamittaista joukkoa lukuunottamatta)

$$F = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_n \leq \beta\}$$

jollain $\beta \in [-\infty, \infty]$. Näin on siis saatu, että F on puoliavaruus, mutta vielä olisi todistettava, että $\beta = 0$, sillä nimenomaan origon oletettiin kuuluvan redusoituun reunaan. Oletetaan siis ensin, että $\beta < 0$. Nyt suljettu pallo $\bar{B}(0, L)$, $0 < L < |\beta|$, kuuluu kokonaan F:n ulkopuolelle. Käyttämällä taas muuttujanvaihtoa $z = p_r(y)$ (muistetaan määritelmä sivulta 13) voidaan laskea

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathcal{L}^n(\bar{B}(0,L) \cap F)}{L^n} = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathcal{L}^n(\bar{B}(0,L) \cap E_{s_k})}{L^n} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{L^n} \int_{\bar{B}(0,L)} \chi_{E_{s_k}}(z)\, dz = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(s_k L)^n} \int_{\bar{B}(0,s_k L)} \chi_E(y)\, dy \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\mathcal{L}^n(\bar{B}(0,s_k L) \cap E)}{(s_k L)^n}.
\end{aligned}$$

Tämä on kuitenkin ristiriita lemman 2.2.3 kohdan (i) kanssa. Vastaavasti tapaus $\beta > 0$ tuottaa ristiriidan lemman 2.2.3 kohdan (ii) kanssa. Siis $\beta = 0$ ja

$$F = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_n \leq 0\} = H^-(0).$$

Näin on saatu todistettua, että $\chi_{E_{s_k}} \to \chi_{H^-(0)}$ $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$:ssä, kun $k \to \infty$, mutta sama tulos haluttaisiin vielä alkuperäiselle jonolle $(r_j) \supset (s_k)$. Tehdään siis vastaoletus, että jollain kompaktilla $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\limsup_{j\to\infty} \int_K |\chi_{E_{r_j}} - \chi_{H^-(0)}| dy > \varepsilon,$$

missä $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa osajono $(t_j) \subset (r_j)$ s.e.

$$\int_K |\chi_{E_{t_j}} - \chi_{H^-(0)}| dy > \varepsilon$$

kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Nyt kuitenkin huomataan, ettei ole olemassa osajonoa $(u_j) \subset (t_j)$, jolle pätisi $\chi_{E_{u_j}} \to \chi_{H^-(0)}$ $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$:ssä, vaikka juuri on todistettu, että jokaisesta jonosta $t_j \to 0$ voidaan poimia tällainen osajono. On siis oltava $\chi_{E_{r_j}} \to \chi_{H^-(0)}$ $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$:ssä myös alkuperäisellä jonolla (r_j). Katsotaan vielä kaavaa (2.16), joka saadaan nyt muotoon

$$\lim_{k\to\infty} \|\partial E_{s_k}\|(\bar{B}(0,L)) = \|\partial H^-(0)\|(\bar{B}(0,L)) \tag{2.17}$$

kaikilla $L > 0$, joille pätee $\|\partial H^-(0)\|(\partial\bar{B}(0,L)) = 0$. Koska $H^-(0)$ on sileäreunainen joukko, sen perimetri avoimessa joukossa on yksinkertaisesti joukon reunan $\mathcal{H}^{n-1}$-mitta [3, s. 4–5]. Käyttämällä tätä ja Radon-mittojen yleisiä ominaisuuksia saadaan

$$\begin{aligned}
&\|\partial H^-(0)\|(\bar{B}(0,L)) = \lim_{\varepsilon\to 0} \|\partial H^-(0)\|(B(0,L+\varepsilon)) \\
&\quad = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{H}^{n-1}(\partial H^-(0) \cap B(0,L+\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Omega_{n-1}(L+\varepsilon)^{n-1} \\
&\quad = \Omega_{n-1}L^{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(\partial H^-(0) \cap B(0,L)) = \|\partial H^-(0)\|(B(0,L)).
\end{aligned}$$

Itse asiassa siis $\|\partial H^-(0)\|(\partial\bar{B}(0,L)) = 0$ kaikilla $L > 0$. Lopulta, jos jollain $L > 0$ olisi

$$\limsup_{j\to\infty} |\|\partial E_{r_j}\|(\bar{B}(0,L)) - \|\partial H^-(0)\|(\bar{B}(0,L))| > \varepsilon > 0,$$

löytyisi taas osajono $(t_j) \subset (r_j)$ s.e.

$$|\|\partial E_{t_j}\|(\bar{B}(0,L)) - \|\partial H^-(0)\|(\bar{B}(0,L))| > \varepsilon$$

kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Tällöin osajonosta (t_j) ei löytyisi osajonoa, jolla yhtälö (2.17) pätisi, mikä on ristiriita. Siis

$$\lim_{j\to\infty} \|\partial E_{r_j}\|(\bar{B}(0,L)) = \|\partial H^-(0)\|(\bar{B}(0,L)) = \Omega_{n-1}L^{n-1}$$

alkuperäisellä (mielivaltaisella) jonolla $r_j \to 0$, ja kaikilla $L > 0$. Näin lauseen molemmat väitteet on saatu todistettua. □

Huomautus. Todistuksessa pääteltiin joukon F olevan puoliavaruus käyttämällä tietoa, että χ_F:n heikko gradientti on e_n:n suuntainen. Myös vähäisemmillä tiedoilla äärellisperimetrisen joukon heikon gradientin suunnasta voidaan päätellä esimerkiksi, että joukon reuna on Lipschitz [3, s. 57–62].

Todistetusta lauseesta saadaan helposti seuraava korollaari.

Korollaari 2.3.2. *Oletetaan, että* $x \in \partial^* E$. *Tällöin*

$$(i) \quad \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap H^-(x) \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap H^+(x) \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} = 0,$$
$$(ii) \quad \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n((\mathbb{R}^n \setminus E) \cap H^-(x) \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} = 0,$$
$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n((\mathbb{R}^n \setminus E) \cap H^+(x) \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} = \frac{1}{2},$$
$$(iii) \quad \lim_{r\to 0} \frac{\|\partial E\|(\bar{B}(x,r))}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} = 1.$$

Todistus. Muistetaan taas, että jos $p_r(y) = x + (y-x)/r$, niin $y \in E$ täsmälleen silloin, kun $p_r(y) \in E_r(x)$. Käyttämällä muuttujanvaihtoa $z = p_r(y)$ sekä edellisestä lauseesta saatavaa tietoa $\chi_{E_r(x)} \to \chi_{H^-(x)}$ $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$:ssä voidaan laskea

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap H^-(x) \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} &= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E\cap H^-(x)\cap \bar{B}(x,r)}(y)\, dy \\
&= \lim_{r\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_r(x)\cap H^-(x)\cap \bar{B}(x,1)}(z)\, dz = \lim_{r\to 0} \int_{H^-(x)\cap \bar{B}(x,1)} \chi_{E_r(x)}(z)\, dz \\
&= \int_{H^-(x)\cap \bar{B}(x,1)} \chi_{H^-(x)}(z)\, dz = \frac{1}{2}\Omega_n.
\end{aligned}$$

Tämä todistaa kohdan (i) ensimmäisen osan, ja toinen saadaan samanlaisella laskulla. Kohta (ii) seuraa kohdasta (i). Voidaan laskea

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n((\mathbb{R}^n \setminus E) \cap H^-(x) \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(H^-(x) \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} - \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap H^-(x) \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Tämä todistaa väitteen (ii) ensimmäisen osan, ja toinen saadaan näytettyä samaan tapaan. Kohta (iii) saadaan todistettua muistamalla ensin, että yhtälön (2.10) mukaan

$$\frac{\|\partial E\|(\bar{B}(x,r))}{r^{n-1}} = \|\partial E_r(x)\|(\bar{B}(x,1)).$$

Toisaalta lauseen 2.3.1 mukaan

$$\|\partial E_r(x)\|(\bar{B}(x,1)) \to \Omega_{n-1} 1^{n-1} = \Omega_{n-1},$$

kun $r \to 0$. Näin onkin saatu väite. □

Huomautus. Vektoria $\nu_E^*(x)$, joka toteuttaa kohdat (i) ja (ii), kutsutaan joskus E:n mittateoreettiseksi normaaliksi (muistetaan, että $\nu_E^*(x)$ on puoliavaruuksien $H^-(x)$ ja $H^+(x)$ normaali) [2, s. 240]. Kohta (iii) puolestaan on vahvempi versio lemman 2.2.3 kohdista (iii) ja (iv).

Luku 3

Redusoidun reunan struktuurilause

Edellisessä luvussa selviteltiin lokaalisti äärellisperimetrisen joukon ja sen perimetrimitan käyttäytymistä redusoidun reunan pisteiden lähellä. Tässä luvussa näytetään aluksi, että redusoitu reuna on hyvin lähellä toista joukkoa, niin kutsuttua mittateoreettista reunaa. Sitten todistetaan vahva tulos redusoidun reunan rakenteesta.

3.1 Mittateoreettinen reuna

Aloitetaan suoraan määritelmästä.

Määritelmä 3.1.1. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Sanotaan, että x kuuluu joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ *mittateoreettiseen reunaan* $\partial_* E$, jos

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} > 0$$

ja

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n((\mathbb{R}^n \setminus E) \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} > 0.$$

Huomataan, että määritelmä on varsin intuitiivinen: karkeasti ottaen mittateoreettiseen reunaan kuuluvan pisteen (mielivaltaisen pieneen) ympäristöön tulee kuulua jonkin verran sekä joukkoa E että sen komplementtia. Selvästi jos piste on joukon E tai sen komplementin sisäpiste, toinen yllä olevista raja-arvoista on nolla, eikä piste voi kuulua mittateoreettiseen reunaan. Joukon mittateoreettinen reuna siis on (kuten redusoitu reunakin) topologisen reunan osajoukko. Edelleen voidaan todeta, että mittateoreettisen reunan määritelmä toimii yleiselle joukolle $E \subset \mathbb{R}^n$. Seuraavaksi kuitenkin oletetaan taas, että E:llä on lokaalisti äärellinen perimetri $\mathbb{R}^n$:ssä, ja selvitetään redusoidun reunan ja mittateoreettisen reunan välinen yhteys.

Lause 3.1.2. *Joukon E redusoitu reuna on mittateoreettisen reunan osajoukko, ja niiden erotuksen $n-1$-ulotteinen Hausdorffin mitta on nolla, toisin sanoen*

(i) $\partial^* E \subset \partial_* E$,

(ii) $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0$.

Todistus. Väite (i) saadaan suoraan lemman 2.2.3 kohdista (i) ja (ii). Katsotaan sitten väitettä (ii). Jokaista $x \in \partial_* E$ kohti on mittateoreettisen reunan määritelmän perusteella olemassa luku $\beta \in (0, 1/2)$, $\beta = \beta(x)$ s.e.

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} > \beta$$

ja

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n((\mathbb{R}^n \setminus E) \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} > \beta.$$

Tämän perusteella on olemassa jonot $r_i \to 0$ ja $\tilde{r}_i \to 0$ s.e.

$$\frac{\mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x,r_i))}{\Omega_n r_i^n} > \beta \tag{3.1}$$

ja

$$\frac{\mathcal{L}^n((\mathbb{R}^n \setminus E) \cap \bar{B}(x,\tilde{r}_i))}{\Omega_n \tilde{r}_i^n} > \beta \tag{3.2}$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Siirtymällä tarpeen mukaan osajonoon voidaan myös olettaa, että $\tilde{r}_i \geq r_i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Nyt epäyhtälö (3.2) voidaan edelleen kirjoittaa muodossa

$$\frac{\mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x,\tilde{r}_i))}{\Omega_n \tilde{r}_i^n} < 1 - \beta \tag{3.3}$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$, sillä E on $\mathcal{L}^n$-mitallinen joukko. Koska $\beta \in (0, 1/2)$ ja kuvaus

$$r \longmapsto \frac{\mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n}$$

on jatkuva, jokaista $i \in \mathbb{N}$ kohti on pakko olla $\tilde{\tilde{r}}_i \in [r_i, \tilde{r}_i]$ s.e.

$$\beta \leq \frac{\mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x,\tilde{\tilde{r}}_i))}{\Omega_n \tilde{\tilde{r}}_i^n} \leq 1 - \beta.$$

Jos nimittäin näin ei olisi, jollain $i \in \mathbb{N}$ olisi oltava

$$\frac{\mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x, r_i))}{\Omega_n r_i^n} > 1 - \beta > \frac{1}{2}$$

ja

$$\frac{\mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x, \tilde{r}_i))}{\Omega_n \tilde{r}_i^n} < \beta < \frac{1}{2}.$$

Nyt jatkuvuuden nojalla olisi kuitenkin oltava

$$\frac{\mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x, \tilde{\tilde{r}}_i))}{\Omega_n \tilde{\tilde{r}}_i^n} = \frac{1}{2}$$

jollain $\tilde{\tilde{r}}_i \in [r_i, \tilde{r}_i]$. On siis olemassa jono $\tilde{\tilde{r}}_i \to 0$ s.e.

$$\frac{\mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x, \tilde{\tilde{r}}_i))}{\Omega_n \tilde{\tilde{r}}_i^n} \geq \beta$$

ja

$$\frac{\mathcal{L}^n((\mathbb{R}^n \setminus E) \cap \bar{B}(x, \tilde{\tilde{r}}_i))}{\Omega_n \tilde{\tilde{r}}_i^n} \geq \beta$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Edelleen suhteellisen isoperimetrisen epäyhtälön nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
&2A_2(n)\|\partial E\|(\bar{B}(x, \tilde{\tilde{r}}_i)) \\
&\quad \geq \min\{\mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x, \tilde{\tilde{r}}_i)), \mathcal{L}^n((\mathbb{R}^n \setminus E) \cap \bar{B}(x, \tilde{\tilde{r}}_i))\}^{(n-1)/n} \\
&\quad \geq (\beta \Omega_n)^{(n-1)/n} \tilde{\tilde{r}}_i^{n-1}
\end{aligned}$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Toisin sanoen

$$\frac{\|\partial E\|(\bar{B}(x, \tilde{\tilde{r}}_i))}{\tilde{\tilde{r}}_i^{n-1}} \geq \tilde{\beta}(x, n) > 0$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Jos nyt määritellään

$$F := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial^* E \mid \limsup_{r \to 0} \frac{\|\partial E\|(\bar{B}(x, r))}{r^{n-1}} > 0 \right\},$$

niin $(\partial_* E \setminus \partial^* E) \subset F$. Todetaan myös, että

$$\|\partial E\|(F) \leq \|\partial E\|(\mathbb{R}^n \setminus \partial^* E) = 0$$

(jälkimmäinen yhtäsuuruus todistettiin luvun 2 alussa). Nyt saadaan edelleen $F = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$, jos määritellään

$$F_j := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial^* E \mid \limsup_{r \to 0} \frac{\|\partial E\|(\bar{B}(x, r))}{r^{n-1}} > \frac{1}{j} \right\}.$$

Otetaan $j \in \mathbb{N}$ ja $\varepsilon > 0$. Koska $\|\partial E\|$ on Radon-mitta, on olemassa [1, s. 8] avoin joukko $U \supset F_j$ s.e.

$$\|\partial E\|(U) \le \|\partial E\|(F_j) + \varepsilon = \varepsilon.$$

Joukon F_j määritelmän nojalla jokaista $x \in F_j$ kohti on olemassa mielivaltaisen pieni säde $r > 0$ s.e.

$$\frac{\|\partial E\|(\bar{B}(x,r))}{r^{n-1}} > \frac{1}{j}.$$

Erityisesti pallo $\bar{B}(x,r)$ saadaan kuulumaan avoimeen joukkoon U. Otetaan sitten $\delta > 0$ ja määritellään

$$\mathcal{A} := \left\{ \bar{B}(x,r) \,|\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial^* E,\ 0 < r < \delta,\ \bar{B}(x,r) \subset U,\ \frac{\|\partial E\|(\bar{B}(x,r))}{r^{n-1}} > \frac{1}{j} \right\}.$$

Selvästi $\mathcal{A}$ muodostaa F_j:n peitteen. Vitalin peitelauseen mukaan voidaan valikoida $\mathcal{A}$:sta numeroituva kokoelma pistevieraita palloja $\{\bar{B}(x^k, r_k)\}_{k=1}^{\infty}$ s.e.

$$F_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{B}(x^k, 5r_k).$$

Nyt $\operatorname{diam} \bar{B}(x^k, 5r_k) \le 10\delta$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joten voidaan laskea

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{n-1}_{10\delta}(F_j) &\le \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_{n-1} (5r_k)^{n-1} \\
&\le \Omega_{n-1} 5^{n-1} j \sum_{k=1}^{\infty} \|\partial E\|(\bar{B}(x^k, r_k)) \\
&\le \Omega_{n-1} 5^{n-1} j \|\partial E\|(U) \\
&< \Omega_{n-1} 5^{n-1} j \varepsilon.
\end{aligned}$$

Antamalla $\varepsilon \to 0$ saadaan $\mathcal{H}^{n-1}_{10\delta}(F_j) = 0$, ja antamalla sitten $\delta \to 0$ saadaan $\mathcal{H}^{n-1}(F_j) = 0$. Koska tässä $j \in \mathbb{N}$ oli mielivaltainen, saadaan

$$\mathcal{H}^{n-1}(F) = \mathcal{H}^{n-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(F_j) = 0.$$

Lopulta saadaan $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) \le \mathcal{H}^{n-1}(F) = 0$, mikä onkin väite (ii). $\square$

3.2 Redusoidun reunan rakenne

Ennen kuin päästään todistamaan redusoidun reunan struktuurilause, tarvitaan ensin muutama lemma. Seuraava lemma olennaisesti kertoo, että jos redusoidun reunan osajoukon perimetrimitta on nolla, myös sen $n-1$-ulotteinen Hausdorffin mitta on nolla — kyse on siis absoluuttisesta jatkuvuudesta.

Lemma 3.2.1. *Jos $A \subset \partial^* E$, niin*

$$\mathcal{H}^{n-1}(A) \leq C(n)\|\partial E\|(A),$$

missä $C(n) > 0$ siis riippuu vain dimensiosta n.

Todistus. Jos $\|\partial E\|(A) = \infty$, väite on selvä, joten oletetaan, että $\|\partial E\|(A) < \infty$. Otetaan $\varepsilon > 0$. Koska $\|\partial E\|$ on Radon-mitta, on olemassa avoin joukko $U \supset A$ s.e.

$$\|\partial E\|(U) \leq \|\partial E\|(A) + \varepsilon.$$

Lemman 2.2.3 kohdan (iii) mukaan kaikilla $x \in \partial^* E$ pätee

$$\liminf_{r \to 0} \frac{\|\partial E\|(\bar{B}(x,r))}{r^{n-1}} \geq C_2(n) > 0.$$

Jos nyt valitaan mielivaltainen $\delta > 0$, niin

$$\mathcal{B} = \left\{ \bar{B}(x,r) \,|\, x \in A,\, 0 < r < \delta,\, \bar{B}(x,r) \subset U,\, C_2(n) r^{n-1} < 2\|\partial E\|(\bar{B}(x,r)) \right\}$$

muodostaa A:n peitteen. Vitalin peitelauseen mukaan $\mathcal{B}$:stä voidaan valikoida pistevieraista palloista koostuva numeroituva osaperhe $\{\bar{B}(x^i, r_i)\}_{i=1}^{\infty}$ s.e.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{B}(x^i, 5r_i).$$

Nyt voidaan laskea

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{n-1}_{10\delta}(A) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_{n-1}(5r_i)^{n-1} \leq \Omega_{n-1} 5^{n-1} \frac{2}{C_2(n)} \sum_{i=1}^{\infty} \|\partial E\|(\bar{B}(x^i, r_i)) \\ &\leq C(n)\|\partial E\|(U) \leq C(n)(\|\partial E\|(A) + \varepsilon), \end{aligned}$$

missä $C(n) > 0$. Jos nyt annetaan $\varepsilon \to 0$, saadaan $\mathcal{H}^{n-1}_{10\delta}(A) \leq C(n)\|\partial E\|(A)$, ja lopulta $\delta \to 0$ antaa $\mathcal{H}^{n-1}(A) \leq C(n)\|\partial E\|(A)$. $\square$

Määritellään nyt kaikkia pisteitä $x \in \mathbb{R}^n$ ja yksikkövektoreita ν kohti hypertaso

$$H_\nu(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \nu \cdot (y - x) = 0\}$$

ja puoliavaruudet

$$\begin{aligned} H_\nu^-(x) &:= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \nu \cdot (y - x) \leq 0\}, \\ H_\nu^+(x) &:= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \nu \cdot (y - x) \geq 0\}. \end{aligned}$$

Vertaamalla aiempiin merkintöihin todetaan, että jos $x \in \partial^* E$, niin esimerkiksi $H^-(x)$ (ilman alaindeksiä) on sama kuin $H^-_{\nu_E^*(x)}(x)$, eli oletusarvoisesti yksikkövektori otetaan redusoidun reunan määritelmästä. Todistetaan nyt yksinkertainen, mutta hieman tekninen lemma.

Lemma 3.2.2. *Jos joukolla $E \subset \mathbb{R}^n$ on lokaalisti äärellinen perimetri $\mathbb{R}^n$:ssä ja funktio ν_E^* on jatkuva joukossa $A \subset \partial^* E$, niin kiinnitetyllä $r > 0$ funktio*

$$m_r : \, x \longmapsto \frac{\mathcal{L}^n(E \cap H^-(x) \cap \bar{B}(x,r))}{r^n}$$

on A:ssa jatkuva (vrt. korollaarissa 2.3.2 esiintyviin lausekkeisiin). Sama pätee, jos puoliavaruus $H^-(x)$ korvataan puoliavaruudella $H^+(x)$, tai joukko E komplementillaan. Edelleen yleisellä $E \subset \mathbb{R}^n$ funktio

$$x \longmapsto \frac{\mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x,r))}{r^n},$$

on jatkuva kiinnitetyllä $r > 0$.

Todistus. Jos yleisesti $B \subset \mathbb{R}^n$ ja $C \subset \mathbb{R}^n$ ovat joukkoja s.e.

$$\mathcal{L}^n(B) < \infty, \, \mathcal{L}^n(C) < \infty,$$

pätee tietenkin

$$\begin{cases} \mathcal{L}^n(B) \leq \mathcal{L}^n(C) + \mathcal{L}^n(B \backslash C), \\ \mathcal{L}^n(C) \leq \mathcal{L}^n(B) + \mathcal{L}^n(C \backslash B). \end{cases}$$

Näistä saadaan

$$|\mathcal{L}^n(B) - \mathcal{L}^n(C)| \leq \mathcal{L}^n(B \backslash C) + \mathcal{L}^n(C \backslash B). \tag{3.4}$$

Nyt voidaan osoittaa m_r:n jatkuvuus ottamalla piste $x \in A$ ja jono $(x^i) \subset A$, $x^i \to x$, ja tarkastelemalla lauseketta

$$\begin{aligned} &|m_r(x^i) - m_r(x)| \\ &\quad = \left| \frac{\mathcal{L}^n(E \cap H^-(x^i) \cap \bar{B}(x^i,r))}{r^n} - \frac{\mathcal{L}^n(E \cap H^-(x) \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} \right| \\ &\quad = \frac{1}{r^n} |\mathcal{L}^n(E \cap H^-(x^i) \cap \bar{B}(x^i,r)) - \mathcal{L}^n(E \cap H^-(x) \cap \bar{B}(x,r))|. \end{aligned}$$

Itseisarvomerkkien sisällä oleva lauseke saadaan epäyhtälön (3.4) perusteella pienemmäksi kuin

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n&[(E \cap H^-(x^i) \cap \bar{B}(x^i, r)) \setminus (E \cap H^-(x) \cap \bar{B}(x, r))] \\ &+\mathcal{L}^n[(E \cap H^-(x) \cap \bar{B}(x, r)) \setminus (E \cap H^-(x^i) \cap \bar{B}(x^i, r))]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Yllä olevat kaksi termiä ovat hyvin samanlaiset, joten keskitytään ensimmäiseen. Se saadaan pienemmäksi kuin

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^n(E \cap [(H^-(x^i) \cap \bar{B}(x^i, r)) \setminus (H^-(x) \cap \bar{B}(x, r))]) \\ \le\ &\mathcal{L}^n[(H^-(x^i) \cap \bar{B}(x^i, r)) \setminus (H^-(x) \cap \bar{B}(x, r))] \\ \le\ &\mathcal{L}^n[(H^-(x^i) \cap \bar{B}(x^i, r)) \setminus H^-(x)] + \mathcal{L}^n[(H^-(x^i) \cap \bar{B}(x^i, r)) \setminus \bar{B}(x, r)] \\ \le\ &\mathcal{L}^n[(H^-(x^i) \cap \bar{B}(x^i, r)) \setminus H^-(x)] + \mathcal{L}^n(\bar{B}(x^i, r) \setminus \bar{B}(x, r)) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Koska $x^i \to x$ ja $\nu_E^*(x^i) \to \nu_E^*(x)$ (muistetaan jatkuvuus), viimeisen rivin jälkimmäistä termiä voidaan arvioida ylöspäin lausekkeella

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^n(\bar{B}(x, r + |x^i - x|) \setminus \bar{B}(x, r)) \\ \to\ &\mathcal{L}^n(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{B}(x, r + |x^i - x|) \setminus \bar{B}(x, r)) \\ =\ &\mathcal{L}^n(\emptyset) = 0. \end{aligned}$$

Edelleen (3.6):n viimeisen rivin ensimmäistä termiä voidaan jostain indeksistä lähtien arvioida ylöspäin lausekkeella

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^n(\bar{B}(x, r+1) \cap (H^-(x^i) \setminus H^-(x))) \\ \le\ &\mathcal{L}^n(\bar{B}(x, r+1) \cap (H^-(x^i) \setminus H^-_{\nu_E^*(x)}(x^i))) \\ &+\mathcal{L}^n(\bar{B}(x, r+1) \cap (H^-_{\nu_E^*(x)}(x^i) \setminus H^-(x))) \\ \to\ &0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

kun $i \to \infty$. Kaavan (3.5) ensimmäinen termi menee siis nollaan, ja toinen termi menee nollaan samaan tapaan. Yhteensä saadaan

$$|m_r(x^i) - m_r(x)| \to 0,$$

kun $i \to \infty$. Tämä todistaa, että m_r on jatkuva funktio joukossa $A \subset \partial^* E$. Muut väitteen osat saadaan todistettua samaan tapaan. □

Yllä olevan lemman avulla voidaan todistaa vielä yksi tarpeellinen lemma, jota tarvitaan redusoidun reunan struktuurilauseen todistuksessa.

Lemma 3.2.3. *Joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ mittateoreettinen reuna $\partial_* E$ on Borel-joukko.*

Todistus. Edellisen lemman nojalla funktio

$$x \longmapsto \frac{\mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x,r))}{r^n}$$

on jatkuva $\mathbb{R}^n$:ssä kiinnitetyllä $r > 0$. Siis se on myös Borel-mitallinen. Täten myös funktio

$$q(x) := \limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} = \inf_{\substack{R>0 \\ R \in \mathbb{Q}}} \sup_{\substack{0<r<R \\ r \in \mathbb{Q}}} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x,r))}{r^n}$$

on Borel-mitallinen $\mathbb{R}^n$:ssä. Tässä infimum ja supremum voidaan ottaa vain rationaalilukujen yli, sillä funktio

$$r \longmapsto \frac{\mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}(x,r))}{r^n}$$

on selvästi jatkuva $\mathbb{R}_+$:ssa. Siis joukko

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) > 0\}$$

on Borel-joukko. Aivan vastaavasti funktio

$$\tilde{q}(x) := \limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n((\mathbb{R}^n \setminus E) \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} = \inf_{\substack{R>0 \\ R \in \mathbb{Q}}} \sup_{\substack{0<r<R \\ r \in \mathbb{Q}}} \frac{\mathcal{L}^n((\mathbb{R}^n \setminus E) \cap \bar{B}(x,r))}{r^n}$$

on Borel-mitallinen $\mathbb{R}^n$:ssä, ja joukko

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{q}(x) > 0\}$$

on Borel-joukko. Täten mittateoreettinen reuna

$$\partial_* E = A_1 \cap A_2$$

on myös Borel-joukko. □

Jos μ on ulkomitta, merkitään μ:n rajoittumaa joukkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mu \llcorner A$, missä siis

$$\mu \llcorner A(B) = \mu(A \cap B)$$

kaikilla $B \subset \mathbb{R}^n$.

Nyt voidaan vihdoin todistaa redusoidun reunan struktuurilause.

Lause 3.2.4. *Jos joukolla E on lokaalisti äärellinen perimetri $\mathbb{R}^n$:ssä, pätee seuraavaa:*

(i) Redusoitu reuna voidaan esittää muodossa

$$\partial^* E = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k \cup N,$$

missä K_k:t ovat C^1-hyperpintojen S_k, $k \in \mathbb{N}$, kompakteja osajoukkoja, ja $\|\partial E\|(N) = \mathcal{H}^{n-1}(N) = 0$.

(ii) Funktio ν_E^* on jokaisella pinnalla S_k, $k \in \mathbb{N}$, kohtisuorassa pintaa vastaan.

(iii) Joukon E perimetrimitta on yksinkertaisesti $n-1$-ulotteisen Hausdorffin mitan rajoittuma redusoidulle reunalle, toisin sanoen

$$\|\partial E\| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* E.$$

Todistus. Korollaarin 2.3.2 kohdissa (i) ja (ii) on yhteensä neljä lauseketta, jotka lähestyvät redusoidulla reunalla arvoja 0 ja 1/2, kun $r \to 0$. Nyt halutaan näyttää, että suppeneminen on tasaista tietyissä redusoidun reunan osajoukoissa. Funktio ν_E^* on $\|\partial E\|$-mitallinen, ja se voidaan jatkaa koko $\mathbb{R}^n$:ssä määritellyksi määrittelemällä se vaikkapa nollaksi $\mathbb{R}^n \setminus \partial^* E$:ssä (muistetaan, että $\|\partial E\|(\mathbb{R}^n \setminus \partial^* E) = 0$). Koska $\|\partial E\|$ on Radon-mitta, joukko $\partial^* E \cap \bar{B}(0,1)$ on $\|\partial E\|$-mitallinen ja

$$\|\partial E\|(\partial^* E \cap \bar{B}(0,1)) < \infty.$$

Nyt Lusinin lauseen [1, s. 15] mukaan on olemassa kompakti $A_1 \subset \partial^* E \cap \bar{B}(0,1)$ s.e. funktio ν_E^* on jatkuva A_1:ssä ja

$$\|\partial E\|((\partial^* E \cap \bar{B}(0,1)) \setminus A_1) < 1.$$

Samalla periaatteella saadaan kompakti $A_2 \subset (\partial^* E \cap \bar{B}(0,2)) \setminus A_1$ s.e. ν_E^* on jatkuva A_2:ssa, ja

$$\|\partial E\|(((\partial^* E \cap \bar{B}(0,2)) \setminus A_1) \setminus A_2) < 1/2.$$

Näin jatkaen saadaan indeksillä $i \in \mathbb{N}$ kompakti joukko

$$A_i \subset (\partial^* E \cap \bar{B}(0,i)) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right)$$

s.e. ν_E^* on jatkuva A_i:ssä ja

$$\|\partial E\| \left((\partial^* E \cap \bar{B}(0,i)) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i} A_j \right) \right) = \|\partial E\| \left(\bar{B}(0,i) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i} A_j \right) \right) < \frac{1}{i}.$$

Määrittelyn perusteella A_i:t ovat pistevieraita, ν_E^* on jatkuva jokaisessa A_i:ssa, ja

$$\begin{aligned}
\|\partial E\|\left(\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)\right) &= \lim_{i\to\infty} \|\partial E\|\left(\bar{B}(0,i)\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \\
&\leq \lim_{i\to\infty} \|\partial E\|\left(\bar{B}(0,i)\setminus\bigcup_{j=1}^{i} A_j\right) \\
&\leq \lim_{i\to\infty} \frac{1}{i} = 0.
\end{aligned}$$

Näin on siis saatu $\partial^* E$ "hajotettua" erillisiksi kompakteiksi joukoiksi A_i, joissa jokaisessa ν_E^* on jatkuva. Määritellään nyt korollaaria 2.3.2 seuraten funktiot

$$\begin{aligned}
m_r^1(x) &:= \frac{\mathcal{L}^n(E\cap H^-(x)\cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n}, \\
m_r^2(x) &:= \frac{\mathcal{L}^n(E\cap H^+(x)\cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n}, \\
m_r^3(x) &:= \frac{\mathcal{L}^n((\mathbb{R}^n\setminus E)\cap H^-(x)\cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n}, \\
m_r^4(x) &:= \frac{\mathcal{L}^n((\mathbb{R}^n\setminus E)\cap H^+(x)\cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n}.
\end{aligned}$$

Lemman 3.2.2 perusteella nämä kaikki ovat kiinteällä $r > 0$ jatkuvia jokaisessa joukossa A_i, $i \in \mathbb{N}$. Jos funktiot kuvittelee jatketuksi koko $\mathbb{R}^n$:ssä jatkuviksi funktioiksi, kuten voidaan tehdä [1, s. 13], ne ovat tietenkin $\mathbb{R}^n$:ssä Borel-mitallisia ja siten $\|\partial E\|$-mitallisia. Määritellään nyt jono $r_l = 1/l$, $l \in \mathbb{N}$. Korollaarin 2.3.2 perusteella funktiot $m_{r_l}^1$ ja $m_{r_l}^4$ lähestyvät pisteittäin arvoa puoli, ja funktiot $m_{r_l}^2$ ja $m_{r_l}^3$ lähestyvät pisteittäin arvoa nolla jokaisessa joukossa A_i, kun $l \to \infty$. Lisäksi todetaan, että $\|\partial E\|(A_i) < \infty$ jokaisella $i \in \mathbb{N}$. Siis Egoroffin lauseen [1, s. 16] perusteella mielivaltaisella $i \in \mathbb{N}$ on olemassa $\|\partial E\|$-mitalliset joukot $A_{i1}^1, \ldots, A_{i1}^4 \subset A_i$ s.e.

$$\|\partial E\|(A_i\setminus A_{i1}^1), \ldots, \|\partial E\|(A_i\setminus A_{i1}^4) < 1/4,$$

ja kunkin funktion $m_{r_l}^1, \ldots, m_{r_l}^4$ suppeneminen on tasaista vastaavalla yläindeksillä merkityssä joukossa $A_{i1}^1, \ldots, A_{i1}^4$. Määrittelemällä

$$A_{i1} := A_{i1}^1 \cap \ldots \cap A_{i1}^4$$

saadaan tietenkin, että funktiot $m_{r_l}^1, \ldots, m_{r_l}^4$ suppenevat kaikki tasaisesti kohti raja-arvojaan joukossa A_{i1}, ja lisäksi $\|\partial E\|(A_i\setminus A_{i1}) < 1$. Tässä (r_l) on tosin vain yksi nollaa lähestyvä jono. Kuitenkin, jos $r \in [r_{l+1}, r_l]$, niin kaikilla $x \in A_i$

$$m_r^2(x) \leq \frac{\mathcal{L}^n(E\cap H^+(x)\cap \bar{B}(x,r_l))}{\Omega_n r_{l+1}^n} = \left(\frac{l+1}{l}\right)^n m_{r_l}^2(x).$$

Siis $m_r^2 \to 0$ A_{i1}:ssä tasaisesti (tarvitsematta rajoittua tiettyyn jonoon). Samalla päättelyllä $m_r^3 \to 0$ A_{i1}:ssä tasaisesti. Toisaalta pätee $m_r^1(x), m_r^4(x) \leq 1/2$ kaikilla $x \in \partial^* E$ ja $r \in \mathbb{R}$. Jos jälleen $r \in [r_{l+1}, r_l]$, voidaan laskea

$$m_r^1(x) \geq \frac{\mathcal{L}^n(E \cap H^-(x) \cap \bar{B}(x, r_{l+1}))}{\Omega_n r_l^n} = \left(\frac{l}{l+1}\right)^n m_{r_{l+1}}^1(x).$$

Tästä nähdään, että myös $m_r^1 \to 1/2$ ja vastaavasti $m_r^4 \to 1/2$ tasaisesti A_{i1}:ssä (riippumatta r-jonosta). Edelleen voidaan nyt valita $\|\partial E\|$-mitallinen joukko $A_{i2} \subset A_i \setminus A_{i1}$ s.e. $\|\partial E\|((A_i \setminus A_{i1}) \setminus A_{i2}) < 1/2$, ja funktioiden $m_r^1, \ldots, m_r^4$ suppeneminen on tasaista A_{i2}:ssä. Näin jatkaen saadaan yleisesti indeksillä $j \in \mathbb{N}$ $\|\partial E\|$-mitallinen joukko

$$A_{ij} \subset A_i \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{j-1} A_{ik}\right)$$

s.e. $m_r^1, \ldots, m_r^4$ suppenevat tasaisesti kohti raja-arvojaan A_{ij}:ssä ja

$$\|\partial E\| \left(A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{j} A_{ik}\right) < \frac{1}{j}.$$

Nyt A_{ij}:t ovat selvästi pistevieraita, ja lisäksi

$$\|\partial E\| \left(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}\right) \leq \|\partial E\| \left(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{k} A_{ij}\right) \leq \frac{1}{k}$$

millä tahansa $k \in \mathbb{N}$, joten on oltava

$$\|\partial E\| \left(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}\right) = 0$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$. On siis kaiken kaikkiaan saatu "hajotettua" redusoitu reuna $\partial^* E$ pistevieraiksi $\|\partial E\|$-mitallisiksi joukoiksi A_{ij}, $i, j \in \mathbb{N}$, s.e. jokaisessa joukossa A_{ij} funktio ν_E^* on jatkuva ja funktiot $m_r^1, \ldots, m_r^4$ suppenevat tasaisesti kohti raja-arvojaan. Koska lopulta Radon-mitan tapauksessa mitallisia joukkoja voidaan approksimoida sisältäpäin kompakteilla joukoilla, voidaan jokaista lukuparia $i, j \in \mathbb{N}$ kohti poimia kompaktit ja pistevieraat joukot $A_{ijl} \subset A_{ij}$, $l \in \mathbb{N}$, s.e.

$$\|\partial E\| \left(A_{ij} \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} A_{ijl}\right) = 0.$$

Jos nyt tehdään merkinnänvaihto $(A_{ijl})_{i,j,l=1}^{\infty} \to (K_k)_{k=1}^{\infty}$, saadaan numeroituva kokoelma pistevieraita, kompakteja joukkoja s.e.

$$\partial^* E = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k \cup N,$$

missä $\|\partial E\|(N) = 0$. Lisäksi jokaisessa K_k, $k \in \mathbb{N}$, funktio ν_E^* on jatkuva ja funktioiden $m_r^1, \ldots, m_r^4$ suppeneminen kohti raja-arvojaan on tasaista.

Määritellään sitten kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $x, y \in K_k$

$$q(x, y) := \frac{\nu_E^*(x) \cdot (y - x)}{|y - x|}.$$

Valitaan mikä tahansa $k \in \mathbb{N}$ ja osoitetaan, että $q(x, y) \to 0$ tasaisesti joukossa K_k, kun $|y - x| \to 0$. Tehdään ensin vastaoletus, että on olemassa $\varepsilon > 0$ ja jonot $(x^i) \subset K_k$, $(y^i) \subset K_k$ s.e. $|x^i - y^i| \to 0$ ja $q(x^i, y^i) \geq \varepsilon$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ (katsotaan myöhemmin tapaus $q(x^i, y^i) \leq -\varepsilon$). Intuitiivisesti vastaoletus sanoo, että vektori $y^i - x^i$ on vähintään tietyssä määrin samansuuntainen vektorin $\nu_E^*(x^i)$ kanssa kaikilla $i \in \mathbb{N}$.

Tutkitaan nyt pisteiden x^i ja y^i ympärille piirrettyjä pieniä palloja, joita on havainnollistettu kuvassa 3.1. Ensinnäkin pätee

$$\bar{B}(y^i, \varepsilon|y^i - x^i|) \subset \bar{B}(x^i, (1 + \varepsilon)|y^i - x^i|),$$

sillä jos $z \in \bar{B}(y^i, \varepsilon|y^i - x^i|)$, niin $|z - y^i| \leq \varepsilon|y^i - x^i|$, ja tällöin

$$|z - x^i| \leq |z - y^i| + |y^i - x^i| \leq \varepsilon|y^i - x^i| + |y^i - x^i| \leq (1 + \varepsilon)|y^i - x^i|.$$

Lisäksi pätee $\bar{B}(y^i, \varepsilon|y^i - x^i|) \subset H^+(x^i)$, sillä jos taas $z \in \bar{B}(y^i, \varepsilon|y^i - x^i|)$, niin $z = y^i + w$, missä $|w| \leq \varepsilon|y^i - x^i|$. Tehdyn vastaoletuksen perusteella

$$\begin{aligned} \nu_E^*(x^i) \cdot (z - x^i) &= \nu_E^*(x^i) \cdot (y^i - x^i) + \nu_E^*(x^i) \cdot w \\ &\geq \varepsilon|y^i - x^i| - |\nu_E^*(x^i)||w| \geq 0, \end{aligned}$$

sillä $|\nu_E^*(x^i)| = 1$. Yhteensä siis

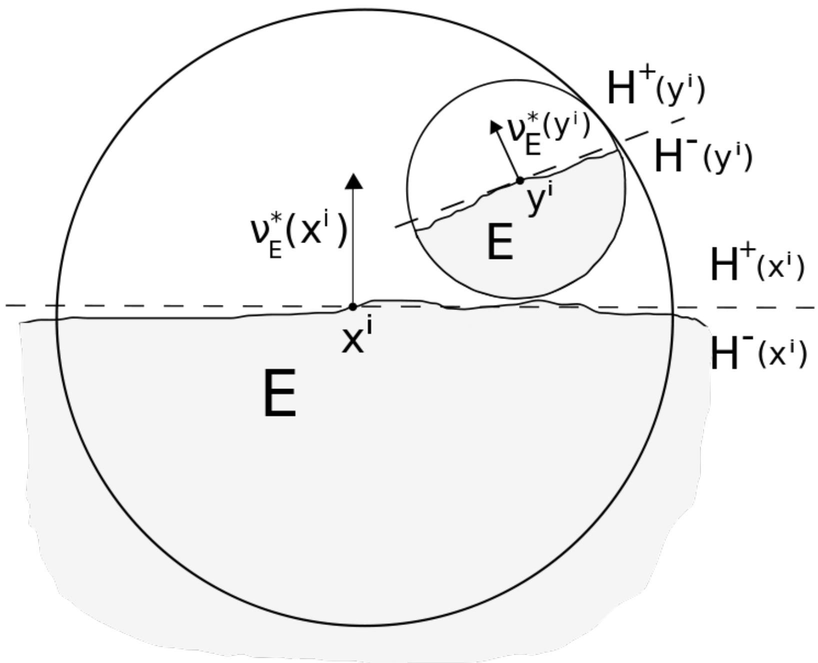
$$\bar{B}(y^i, \varepsilon|y^i - x^i|) \subset \bar{B}(x^i, (1 + \varepsilon)|y^i - x^i|) \cap H^+(x^i)$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Toisin sanoen saadaan jono y^i-keskisiä palloja, joista kukin sisältyy hieman suurempaan x^i-keskiseen palloon ja myös puoliavaruuteen $H^+(x^i)$. Ottamalla leikkaus molemmilta puolilta joukon E kanssa saadaan edelleen

$$\bar{B}(y^i, \varepsilon|y^i - x^i|) \cap E \subset \bar{B}(x^i, (1 + \varepsilon)|y^i - x^i|) \cap H^+(x^i) \cap E. \tag{3.7}$$

Muistamalla nyt, että funktio m_r^1 suppenee tasaisesti kohti arvoa $1/2$ joukossa K_k, saadaan, että

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(\bar{B}(y^i, \varepsilon|y^i - x^i|) \cap E) &\geq \mathcal{L}^n(\bar{B}(y^i, \varepsilon|y^i - x^i|) \cap E \cap H^-(y^i)) \\ &\geq \frac{1}{3}\Omega_n(\varepsilon|y^i - x^i|)^n, \end{aligned} \tag{3.8}$$



Kuva 3.1: Funktiolle $q(x, y)$ tehdyn vastaoletuksen havainnollistus.

kun $|y^i - x^i| < \delta$ sopivalla $\delta > 0$ (luvun $1/3$ sijaan voitaisiin valita muukin luku väliltä $(0, 1/2)$). Toisin sanoen kyllin suurilla indekseillä $i \in \mathbb{N}$ palloissa $\bar{B}(y^i, \varepsilon|y^i - x^i|)$ on aina "vähintään tietyn verran joukkoa E". Yhdistämällä nyt kaavat (3.7) ja (3.8) saadaan

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(\bar{B}(x^i, (1+\varepsilon)|y^i - x^i|) \cap H^+(x^i) \cap E) &\geq \mathcal{L}^n(\bar{B}(y^i, \varepsilon|y^i - x^i|) \cap E) \\ &\geq \frac{1}{3}\Omega_n(\varepsilon|y^i - x^i|)^n\end{aligned}$$

kaikilla kyllin suurilla $i \in \mathbb{N}$. Tämä on kuitenkin ristiriita sen kanssa, että funktio m_r^2 suppenee tasaisesti nollaan joukossa K_k (muistetaan, että $\varepsilon > 0$ on tässä kiinnitetty luku). Katsotaan sitten tapaus, että on olemassa $\varepsilon > 0$ ja jonot $(x^i) \subset K_k$, $(y^i) \subset K_k$ s.e. $|x^i - y^i| \to 0$ ja $q(x^i, y^i) \leq -\varepsilon$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Nyt saadaan yllä olevaa päättelyä mukaillen ensin, että

$$\bar{B}(y^i, \varepsilon|y^i - x^i|) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E) \subset \bar{B}(x^i, (1+\varepsilon)|y^i - x^i|) \cap H^-(x^i) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E)$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$, ja lisäksi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(\bar{B}(y^i, \varepsilon|y^i - x^i|) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E)) &\geq \mathcal{L}^n(\bar{B}(y^i, \varepsilon|y^i - x^i|) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E) \cap H^+(y^i)) \\ &\geq \frac{1}{3}\Omega_n(\varepsilon|y^i - x^i|)^n,\end{aligned}$$

kun $|y^i - x^i| < \delta$ sopivalla $\delta > 0$, sillä funktio m_r^4 suppenee tasaisesti kohti arvoa 1/2. Nämä yhdistämällä saadaan

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}^n(\bar{B}(x^i, (1+\varepsilon)|y^i - x^i|) \cap H^-(x^i) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E)) \\ &\quad \geq \mathcal{L}^n(\bar{B}(y^i, \varepsilon|y^i - x^i|) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E)) \\ &\quad \geq \frac{1}{3}\Omega_n(\varepsilon|y^i - x^i|)^n\end{aligned}$$

kaikilla kyllin suurilla $i \in \mathbb{N}$. Tämä on kuitenkin ristiriita sen kanssa, että funktio m_r^3 suppenee tasaisesti nollaan joukossa K_k. Kaiken kaikkiaan siis saadaan millä tahansa $k \in \mathbb{N}$, että $q(x,y) \to 0$ tasaisesti joukossa K_k, kun $|y - x| \to 0$. Muistetaan, että ν_E^* on jatkuva valitussa joukossa K_k, ja määritellään lisäksi (jatkuva) funktio $f_k \equiv 0$ K_k:ssa. Nyt ν_E^*:n voidaan ajatella olevan f_k:n gradientti joukossa K_k, ja Whitneyn ekstensiolauseen [1, s. 245] mukaan on olemassa funktio $\hat{f}_k \in C^1(\mathbb{R}^n)$ s.e. K_k:ssa $\hat{f}_k \equiv 0$ ja $\nabla \hat{f}_k = \nu_E^*$. Koska siis $|\nabla \hat{f}_k| = 1$ K_k:ssa ja gradientti on jatkuva, on olemassa avoin ja rajoitettu joukko $U_k \supset K_k$ ja edelleen avoin ja rajoitettu $V_k \supset\supset U_k$ s.e. $|\nabla \hat{f}_k| \geq 1/2$ V_k:ssa. Määritellään sitten joukko

$$S_k = \{x \in V_k \mid \hat{f}_k(x) = 0\} \subset V_k.$$

Ensin todetaan, että koska $\hat{f}_k$ on jatkuva, S_k on suljettu V_k:ssa. Jokaisella $x \in S_k$ pätee $|\nabla \hat{f}_k(x)| > 0$, joten $|(\nabla \hat{f}_k(x))_i| > 0$ jollain $i = 1, \ldots, n$. Nyt implisiittifunktiolauseen mukaan S_k voidaan esittää jossain pisteen $x \in S_k$ ympäristössä muodossa

$$S_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = g_k(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\},$$

missä g_k on C^1-funktio. Selvästi $K_k \subset S_k$. Tämä tarkoittaa, että jokainen K_k on C^1-hyperpinnan kompakti osajoukko, mikä todistaa väitteen (i). Koska edelleen S_k on funktion $\hat{f}_k$ tasa-arvopinta, $\nabla \hat{f}_k$ on aina pintaa vastaan kohtisuorassa, eli ν_E^* on S_k:ta vastaan kohtisuorassa. Tämä on väite (ii).

Todistetaan sitten, että $\|\partial E\| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* E$. Ensin todetaan, että $\|\partial E\|$ on Radon-mitta ja $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* E = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial_* E$, sillä lauseen 3.1.2 mukaan

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0.$$

Koska toisaalta lemman 3.2.3 mukaan mittateoreettinen reuna $\partial_* E$ on Borel-joukko, $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* E$ on Borel-säännöllinen ulkomitta [1, s. 5]. Selvästi pätee

$$\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n \setminus \partial^* E) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k \cup N. \tag{3.9}$$

Tässä joukot K_k ovat tietenkin kompakteina sekä $\|\partial E\|$- että $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* E$-mitallisia. Muistetaan, että $\|\partial E\|(\mathbb{R}^n \setminus \partial^* E) = 0$ ja (triviaalisti) $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* E(\mathbb{R}^n \setminus \partial^* E) = 0$. Edelleen lemman 3.2.1 nojalla

$$\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* E(N) \leq C(n)\|\partial E\|(N) = 0.$$

Yhteensä siis kaikki hajotelman (3.9) joukot ovat sekä $\|\partial E\|$- että $\mathcal{H}^{n-1}\llcorner\partial^* E$-mitallisia. Valitaan nyt mielivaltainen Borel-joukko $B \subset \mathbb{R}^n$ (myöhemmin tutkitaan tapaus, jossa joukko ei välttämättä ole Borel). Voidaan laskea

$$\begin{aligned}\|\partial E\|(B) &= \|\partial E\|(B \cap (\mathbb{R}^n \setminus \partial^* E)) + \sum_{k=1}^{\infty} \|\partial E\|(B \cap K_k) + \|\partial E\|(B \cap N) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \|\partial E\|(B \cap K_k),\end{aligned}$$

ja samoin $\mathcal{H}^{n-1}\llcorner\partial^* E$:lle. Riittää siis osoittaa, että

$$\|\partial E\|(B \cap K_k) = \mathcal{H}^{n-1}\llcorner\partial^* E(B \cap K_k)$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$, eli itse asiassa voidaan olettaa, että B on Borel-joukko ja $B \subset K_k$. Olkoon nyt $\tilde{S}_k = S_k \cap \bar{U}_k$, jolloin $\tilde{S}_k$ on kompakti (koska S_k oli suljettu V_k:ssa) ja $\tilde{S}_k \subset V_k$. Otetaan sitten mikä tahansa $x \in \tilde{S}_k$. Muistetaan, että $|\nabla \hat{f}_k(x)| \geq 1/2$, joten S_k voidaan esittää jossain pallossa $\bar{B}(x,r)$, $r > 0$, muodossa

$$S_k = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, y_i = g_k(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)\}.$$

Määritellään joukko

$$C = \{y \in \bar{B}(x,r) \,|\, y_i \leq g_k(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)\}.$$

Nyt joukko C on sileäreunainen joukko pallossa $\bar{B}(x,r)$, joten sille pätee [3, s. 39]

$$\|\partial C\|(\bar{B}(x,r)) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial C \cap \bar{B}(x,r)).$$

Tässähän $\partial C = S_k$ pallossa $B(x,r)$. Selvästi $x \in \partial^* C$, joten korollaarista 2.3.2 saadaan

$$\lim_{r \to 0} \frac{\|\partial C\|(\bar{B}(x,r))}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} = 1.$$

Näin saadaan yhteensä

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^{n-1}(S_k \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} = 1. \tag{3.10}$$

Tämän avulla voidaan osoittaa, että $\mathcal{H}^{n-1}\llcorner\tilde{S}_k$ on Radon-mitta. Koska $\tilde{S}_k$ on kompaktina joukkona Borel-joukko, $\mathcal{H}^{n-1}\llcorner\tilde{S}_k$ on Borel-säännöllinen ulkomitta. Toisaalta, koska $\tilde{S}_k$ on kompakti, saadaan sille äärellinen peite $\{\bar{B}(x^i, r_i)\}_{i=1}^m$ s.e.

$$\mathcal{H}^{n-1}(\tilde{S}_k) \leq \sum_{i=1}^{m} \mathcal{H}^{n-1}(S_k \cap \bar{B}(x^i, r_i)) < 2 \sum_{i=1}^{m} \Omega_{n-1} r_i^{n-1} < \infty.$$

Siis $\mathcal{H}^{n-1}\llcorner\tilde{S}_k$ on Radon-mitta. Otetaan nyt $x \in B \subset K_k \subset \partial^* E$. Muistetaan edelleen korollaarista 2.3.2, että

$$\lim_{r\to 0}\frac{\|\partial E\|(\bar{B}(x,r))}{\Omega_{n-1}r^{n-1}} = 1.$$

Yhdistämällä tämä yhtälöön (3.10), jossa voidaan pisteissä $x \in B$ korvata $S_k \hookrightarrow \tilde{S}_k$, saadaan

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{H}^{n-1}\llcorner\tilde{S}_k(\bar{B}(x,r))}{\|\partial E\|(\bar{B}(x,r))} = \lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{H}^{n-1}(\tilde{S}_k\cap\bar{B}(x,r))}{\|\partial E\|(\bar{B}(x,r))} = 1$$

kaikilla $x \in B$. Jos yleensä μ ja ν ovat Radon-mittoja, ja merkitään niiden derivaattaa

$$D_\mu\nu(x) := \lim_{r\to 0}\frac{\nu(\bar{B}(x,r))}{\mu(\bar{B}(x,r))}$$

silloin, kun tämä raja-arvo on olemassa, pätee seuraava tulos [1, s. 37]: Jos $0 < \alpha < \infty$ ja

$$A \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid D_\mu\nu(x) \le \alpha\},$$

niin $\nu(A) \le \alpha\mu(A)$. Aivan vastaavasti, jos

$$A \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid D_\mu\nu(x) \ge \alpha\},$$

niin $\nu(A) \ge \alpha\mu(A)$. Koska nyt pätee

$$B \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid D_{\|\partial E\|}\mathcal{H}^{n-1}\llcorner\tilde{S}_k(x) = 1\},$$

voidaan siis päätellä, että

$$\|\partial E\|(B) = \mathcal{H}^{n-1}\llcorner\tilde{S}_k(B) = \mathcal{H}^{n-1}\llcorner S_k(B) = \mathcal{H}^{n-1}\llcorner\partial^* E(B).$$

Tässä oli $B \subset K_k$, mutta kuten ylempänä todettiin, tämä riittää todistamaan, että

$$\|\partial E\|(B) = \mathcal{H}^{n-1}\llcorner\partial^* E(B)$$

mielivaltaisella Borel-joukolla $B \subset \mathbb{R}^n$. Valitaan nyt mielivaltainen joukko $A \subset \mathbb{R}^n$. Koska sekä $\|\partial E\|$ että $\mathcal{H}^{n-1}\llcorner\partial^* E$ ovat Borel-säännöllisiä ulkomittoja, kuten aiemmin todettiin, on olemassa Borel-joukot $B_1 \supset A$ ja $B_2 \supset A$ s.e.

$$\|\partial E\|(B_1) = \|\partial E\|(A), \qquad \mathcal{H}^{n-1}\llcorner\partial^* E(B_2) = \mathcal{H}^{n-1}\llcorner\partial^* E(A).$$

Edelleen leikkaukselle $B = B_1 \cap B_2$ (joka on Borel-joukko) pätee selvästi $B \supset A$ ja

$$\|\partial E\|(B) = \|\partial E\|(A), \qquad \mathcal{H}^{n-1}\llcorner\partial^* E(B) = \mathcal{H}^{n-1}\llcorner\partial^* E(A).$$

Yhteensä

$$\|\partial E\|(A) = \mathcal{H}^{n-1}\llcorner\partial^* E(A).$$

Mitat ovat siis samat, ja myös väite (iii) on tosi. $\square$

Huomautus. Tulosta $\|\partial E\| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* E$ todistettaessa oletettiin, että E:llä on lokaalisti äärellinen perimetri $\mathbb{R}^n$:ssä. Kääntäen voidaan näyttää, että $\mathcal{L}^n$-mitallisella joukolla $E \subset \mathbb{R}^n$ on lokaalisti äärellinen perimetri $\mathbb{R}^n$:ssä, jos

$$\mathcal{H}^{n-1}(K \cap \partial_* E) < \infty$$

jokaisella kompaktilla $K \subset \mathbb{R}^n$ [1, s. 222]. Tässä ehdossa siis esiintyy mittateoreettinen reuna, joka voidaan määritellä yleiselle joukolle.

Luku 4

BV-funktioiden pisteittäiset ominaisuudet

Siirrytään tarkastelemaan tässä luvussa yleisiä BV-funktioita, rajoittumatta siis lokaalisti äärellisperimetrisiin joukkoihin. Luvussa päästään soveltamaan kahdessa edellisessä luvussa saatuja tuloksia muistamalla, että BV-funktioiden coarea-kaavan mukaan BV-funktion tasojoukoilla on (lokaalisti) äärellinen perimetri $\mathbb{R}^n$:ssä. Tätä hyödyntäen voidaan todistaa, että jokainen BV-funktio on mittateoreettisessa mielessä jatkuva lukuunottamatta "hyppäyksiä" yli C^1-hyperpintojen. Tarkasti tämä ilmaistaan Lebesguen lauseen BV-funktioille pätevässä versiossa.

4.1 Mittateoreettinen raja-arvo ja jatkuvuus

Tarkastellaan ensin (yleisen) funktion mittateoreettista jatkuvuutta.

Määritelmä 4.1.1. Funktion $f : \mathbb{R}^n \longmapsto [-\infty, \infty]$ approksimatiivinen raja-arvo pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$ on $\kappa(x) \in \mathbb{R}$, jos

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{y \in \mathbb{R}^n \mid |f(y) - \kappa(x)| > \varepsilon\} \cap \bar{B}(x, r))}{r^n} = 0$$

kaikilla $\varepsilon > 0$. Tällöin merkitään

$$\operatorname{ap} \lim_{y \to x} f(y) = \kappa(x).$$

Määritelmä siis sanoo, että joukon $\{y \in \mathbb{R}^n \mid |f(y)-\kappa(x)| > \varepsilon\} = \{|f-\kappa(x)| > \varepsilon\}$ (käytetään jatkossa tällaista tiivistettyä merkintää) tiheyden on oltava nolla pisteessä x mielivaltaisen pienillä $\varepsilon > 0$. On varsin helppo nähdä, että approksimatiivinen raja-arvo on yksikäsitteinen [1, s. 46]. Määritellään edelleen approksimatiivinen $\liminf$ ja approksimatiivinen $\limsup$.

Määritelmä 4.1.2. Jos on annettu funktio $f : \mathbb{R}^n \longmapsto [-\infty, \infty]$, niin

$$\lambda(x) := \text{ap} \liminf_{y \to x} f(y) := \sup \left\{ s \in \mathbb{R} \mid \lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{f < s\} \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} = 0 \right\},$$
$$\mu(x) := \text{ap} \limsup_{y \to x} f(y) := \inf \left\{ s \in \mathbb{R} \mid \lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{f > s\} \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} = 0 \right\}.$$

Intuitiivisesti esimerkiksi $\mu(x)$ on "suurin" luku s, jolla joukon $\{f > s\}$ tiheys pisteessä x on nollaa suurempi. Jos pätee

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{f < s\} \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} > 0$$

kaikilla $s \in \mathbb{R}$, määritellään $\lambda(x) = -\infty$, ja jos

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{f < s\} \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} = 0$$

kaikilla $s \in \mathbb{R}$, asetetaan $\lambda(x) = \infty$. Samoin voi olla $\mu(x) = \pm\infty$. Tämä huomioon ottaen λ ja μ ovat joka pisteessä hyvin määriteltyjä ja yksikäsitteisiä. Voidaan varsin helposti näyttää, että $\lambda(x) \leq \mu(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Edelleen voidaan todeta, että jos $\lambda(x) = \mu(x) = t \in \mathbb{R}$, niin kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee

$$\begin{aligned}
&\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{|f - t| > \varepsilon\} \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} \\
&= \lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{f > t + \varepsilon\} \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} + \lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{f < t - \varepsilon\} \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} = 0,
\end{aligned}$$

eli saadaan $t = \kappa(x)$. Samoin on selvää, että jos approksimatiivinen raja-arvo $\kappa(x)$ on olemassa, pätee $\lambda(x) = \mu(x) = \kappa(x)$. Approksimatiivinen jatkuvuus määritellään luonnollisella tavalla:

Määritelmä 4.1.3. Funktio $f : \mathbb{R}^n \longmapsto [-\infty, \infty]$ on approksimatiivisesti jatkuva pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$, jos $\kappa(x) = f(x)$, eli jos approksimatiivinen raja-arvo ja funktion arvo yhtyvät.

Todetaan, että approksimatiivinen jatkuvuus eroaa tavallisesti jatkuvuudesta siten, että funktion arvot esimerkiksi jollain pistettä x lähestyvällä pistejonolla voivat olla mitä tahansa, sillä funktion arvot yksittäisissä pisteissä eivät vaikuta approksimatiiviseen raja-arvoon. Todistetaan nyt tulos λ:n ja μ:n mitallisuudesta.

Lemma 4.1.4. *Funktiot λ ja μ ovat Borel-mitallisia.*

Todistus. Määritellään lukuun $t \in \mathbb{R}$ liittyvä funktion $f : \mathbb{R}^n \longmapsto [-\infty, \infty]$ *tasojoukko*

$$F_t := \{y \in \mathbb{R}^n \mid f(y) > t\}.$$

Lemman 3.2.2 perusteella funktio

$$x \longmapsto \frac{\mathcal{L}^n(F_t \cap \bar{B}(x,r))}{r^n}$$

on jatkuva kiinnitetyillä $t \in \mathbb{R}$ ja $r > 0$. Siis funktio

$$q_t(x) := \limsup_{\substack{r \to 0 \\ r \in \mathbb{Q}}} \frac{\mathcal{L}^n(F_t \cap \bar{B}(x,r))}{r^n}$$

on Borel-mitallinen jokaisella $t \in \mathbb{R}$. Koska toisaalta funktio

$$r \longmapsto \frac{\mathcal{L}^n(F_t \cap \bar{B}(x,r))}{r^n}$$

on jatkuva kiinnitetyllä $x \in \mathbb{R}^n$ ja $t \in \mathbb{R}$, niin $q_t(x) = 0$ täsmälleen silloin, kun

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(F_t \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} = 0.$$

Koska lisäksi q_t on vähenevä funktio t:n suhteen, saadaan kaikilla $s \in \mathbb{R}$

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mu(x) \leq s\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^n \mid q_{s+1/k}(x) = 0\}.$$

Siis μ on Borel-mitallinen funktio. Funktion λ Borel-mitallisuus saadaan näytettyä samaan tapaan. $\square$

Määritellään nyt joukko, jossa approksimatiivista raja-arvoa ei ole olemassa:

$$J := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda(x) < \mu(x)\}.$$

Koska funktio $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ kuuluu myös avaruuteen $L^1(\mathbb{R}^n)$, f on approksimatiivisesti jatkuva $\mathcal{L}^n$-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$, ja pätee siis $\kappa(x) = \lambda(x) = \mu(x) = f(x) \in \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$ [1, s. 47]. Voidaan täten todeta, että

$$-\infty < \lambda(x) = \mu(x) < \infty$$

$\mathcal{L}^n$-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$. Tätä tulosta vahvennetaan seuraavissa lauseissa.

Lause 4.1.5. *Jos $f \in BV(\mathbb{R}^n)$, niin joukolle J pätee*

$$J \subset \bigcup_{t \in A} \partial_* F_t = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k \cup N,$$

missä $A \subset \mathbb{R}$ on numeroituva, $\mathbb{R}$:ssä tiheä joukko; jokaisella tasojoukolla $F_t \subset \mathbb{R}^n$, $t \in A$, on äärellinen perimetri $\mathbb{R}^n$:ssä; joukot K_k ovat C^1-hyperpintojen kompakteja osajoukkoja ja $\mathcal{H}^{n-1}(N) = 0$.

Todistus. Otetaan mikä tahansa $x \in J$. Tällöin pätee $\lambda(x) < \mu(x)$, eli edelleen $\lambda(x) < t < \mu(x)$ jollain $t \in \mathbb{R}$. Funktion f tasojoukolle F_t saadaan

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(F_t \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} > 0,$$

sillä $t < \mu(x)$. Samaan tapaan

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n((\mathbb{R}^n \backslash F_t) \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} = \limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{f \leq t\} \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} > 0,$$

sillä $t > \lambda(x)$. Tämä tarkoittaa mittateoreettisen reunan määritelmän mukaan, että $x \in \partial_* F_t$. Nyt BV-funktioiden coarea-kaavan [1, s. 185] mukaan tasojoukoilla F_t on äärellinen perimetri $\mathbb{R}^n$:ssä m.k. $t \in \mathbb{R}$. Tällaisilla t:n arvoilla pätee lauseen 3.1.2 perusteella $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* F_t \backslash \partial^* F_t) = 0$, ja lauseen 3.2.4 mukaan edelleen

$$\partial^* F_t = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k^t \cup N^t,$$

missä K_k^t:t ovat C^1-hyperpintojen kompakteja osajoukkoja ja $\mathcal{H}^{n-1}(N^t) = 0$. Jos nyt valitaan $\mathbb{R}$:n numeroituva, tiheä osajoukko A s.e. joukolla F_t on äärellinen perimetri jokaisella $t \in A$, niin jokaisella $x \in J$ pätee $\lambda(x) < t < \mu(x)$ jollain $t \in A$. Siispä pätee

$$J \subset \bigcup_{t \in A} \partial_* F_t,$$

eli sopivalla indeksoinnilla

$$J \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k \cup N,$$

missä K_k:t ovat C^1-hyperpintojen kompakteja osajoukkoja ja $\mathcal{H}^{n-1}(N) = 0$. Tämä todistaa väitteen. $\square$

Huomautus. Todetaan, että tässä päästiin soveltamaan edellisessä luvussa todistettuja tuloksia BV-funktion tasojoukkoihin.

Korollaari 4.1.6. *Joukko J on σ-äärellinen mitan $\mathcal{H}^{n-1}$:n suhteen.*

Todistus. Lauseen 4.1.5 perusteella siis

$$J \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k \cup N,$$

eli

$$J = \bigcup_{k=1}^{\infty} (K_k \cap J) \cup (N \cap J),$$

missä joukot $K_k \cap J$, $k \in \mathbb{N}$, ovat lemman 4.1.4 nojalla Borel-joukkoja, ja $\mathcal{H}^{n-1}(N \cap J) = 0$. Kaikki nämä joukot ovat siis $\mathcal{H}^{n-1}$-mitallisia. Täsmälleen samaan tapaan kuin lauseen 3.2.4 todistuksessa sivulla 37 voidaan nyt osoittaa, että $\mathcal{H}^{n-1}(K_k) < \infty$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tästä saadaan väite. $\square$

Lause 4.1.7. *Jos $f \in BV(\mathbb{R}^n)$, niin*

$$-\infty < \lambda(x) \leq \mu(x) < \infty$$

$\mathcal{H}^{n-1}$-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$.

Todistus. Määritellään ensin lukuun $t \in \mathbb{R}$ liittyvä joukko

$$\Lambda_t := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \lambda(x) > t\}.$$

Olkoon $t > 0$. Jos $x \in \Lambda_t$, niin $t < \lambda(x)$ ja edelleen $t + \varepsilon < \lambda(x)$ jollain $\varepsilon > 0$. Siispä λ:n määritelmän nojalla

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{f < t + \varepsilon\} \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} = 0.$$

Koska edelleen $\{f \leq t\} \subset \{f < t + \varepsilon\}$, niin

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{f \leq t\} \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} = 0.$$

Täten saadaan

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{f > t\} \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} = 1.$$

Koska toisaalta $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja $t > 0$, pätee myös

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\mathcal{L}^n(\{f > t\} \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} = 0.$$

Lisäksi funktio

$$r \longmapsto \frac{\mathcal{L}^n(\{f > t\} \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n}$$

on ilmeisen jatkuva, joten saadaan, että kaikilla $x \in \Lambda_t$ on olemassa jokin $r > 0$ s.e.

$$\frac{\mathcal{L}^n(\{f > t\} \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} = \frac{1}{3}. \tag{4.1}$$

Käyttämällä näitä säteitä saadaan joukolle Λ_t peite $\{\bar{B}(x,r) \,|\, x \in \Lambda_t\}$. Koska $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, säteillä on myös jokin yläraja $R > 0$. Vitalin peitelauseen mukaan voidaan nyt poimia numeroituva kokoelma pistevieraita palloja $\{\bar{B}(x^i, r_i)\}_{i=1}^{\infty}$ s.e.

$$\Lambda_t \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{B}(x^i, 5r_i).$$

Rajoitutaan sellaisiin $t > 0$, että tasojoukolla $F_t = \{f > t\}$ on äärellinen perimetri $\mathbb{R}^n$:ssä — BV-funktioiden coarea-kaavan mukaan tämä pätee m.k. $t \in \mathbb{R}$. Nyt millä tahansa $i \in \mathbb{N}$ saadaan käyttämällä yhtälöä (4.1) ja relatiivista isoperimetristä epäyhtälöä, että

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{3}\Omega_n r_i^n\right)^{(n-1)/n} &= \mathcal{L}^n(F_t \cap \bar{B}(x^i, r_i))^{(n-1)/n} \\
&= \min\{\mathcal{L}^n(F_t \cap \bar{B}(x^i, r_i)),\, \mathcal{L}^n((\mathbb{R}^n \setminus F_t) \cap \bar{B}(x^i, r_i))\}^{(n-1)/n} \\
&\leq 2A_2(n)\|\partial F_t\|(\bar{B}(x^i, r_i)).
\end{aligned}$$

Huomataan, että tässä toinen yhtäsuuruus päti sen ansiosta, että yhtälössä (4.1) valittiin oikealle puolelle luku $1/3$ (muukin puolta pienempi luku olisi sopinut). Sulauttamalla vakiot yhteen saadaan

$$r_i^{n-1} \leq C(n)\|\partial F_t\|(\bar{B}(x^i, r_i))$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Nyt voidaan laskea

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{10R}^{n-1}(\Lambda_t) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_{n-1}(5r_i)^{n-1} \\
&\leq C(n)\sum_{i=1}^{\infty} \|\partial F_t\|(\bar{B}(x^i, r_i)) \\
&\leq C(n)\|\partial F_t\|(\mathbb{R}^n) \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

kaikilla $t > 0$, joille pätee $\|\partial F_t\|(\mathbb{R}^n) < \infty$. Toisaalta coarea-kaavan mukaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\partial F_t\|(\mathbb{R}^n)dt = \|Df\|(\mathbb{R}^n) < \infty.$$

Tästä saadaan

$$\liminf_{t\to\infty} \|\partial F_t\|(\mathbb{R}^n) = 0,$$

eli

$$\lim_{j\to\infty} \|\partial F_{t_j}\|(\mathbb{R}^n) = 0 \qquad (4.3)$$

sopivalla jonolla $t_j \to \infty$. Yhdistämällä nyt kaavat (4.2) ja (4.3) saadaan (muistetaan, että säteiden yläraja $R > 0$ riippuu luvusta $t > 0$)

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{n-1}_\infty(\{\lambda(x) = \infty\}) &= \mathcal{H}^{n-1}_\infty\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \Lambda_{t_j}\right) \\ &\leq \liminf_{j\to\infty} \mathcal{H}^{n-1}_\infty(\Lambda_{t_j}) \\ &\leq \liminf_{j\to\infty} C(n)\|\partial F_{t_j}\|(\mathbb{R}^n) = 0.\end{aligned}$$

Tästä saadaan suoraan, että $\mathcal{H}^{n-1}(\{\lambda(x) = \infty\}) = 0$ [1, s. 64]. Aivan vastaavaan tapaan saadaan todistettua, että $\mathcal{H}^{n-1}(\{\mu(x) = -\infty\}) = 0$. Lopuksi täydennetään päättely todistamalla vielä, että

$$\mathcal{H}^{n-1}(\{\mu(x) - \lambda(x) = \infty\}) = 0.$$

Tarkastellaan joukkoa

$$D = \{(x,t) \,|\, x \in J,\, \lambda(x) < t < \mu(x)\}.$$

Lauseen 4.1.5 nojalla pätee

$$D \subset J \times \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} (j-1,j] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (K_k \cup N) \times \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} (j-1,j] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} (K_k \cup N) \times (j-1,j].$$

Tulomitan ominaisuuksien [1, s. 22] perusteella (vrt. korollaari 4.1.6)

$$(\mathcal{H}^{n-1} \times \mathcal{L}^1)(K_k \times (j-1,j]) = \mathcal{H}^{n-1}(K_k)\mathcal{L}^1((j-1,j]) < \infty$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$. Lisäksi joukko D voidaan osoittaa $\mathcal{H}^{n-1} \times \mathcal{L}^1$-mitalliseksi — vrt. [1, s. 66]. Siis

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} ((K_k \cup N) \times (j-1,j]) \cap D,$$

eli D on σ-äärellinen tulomitan $\mathcal{H}^{n-1} \times \mathcal{L}^1$ suhteen. Fubinin lauseen [1, s. 22] nojalla voidaan nyt laskea

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\{x \in J \,|\, \lambda(x) < t < \mu(x)\})dt \\ &\quad= \int_J \mathcal{L}^1(\{t \in \mathbb{R} \,|\, \lambda(x) < t < \mu(x)\})d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad= \int_J (\mu(x) - \lambda(x))d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad= \int_{\mathbb{R}^n} (\mu(x) - \lambda(x))d\mathcal{H}^{n-1}. \qquad (4.4)\end{aligned}$$

Integroimisalue voitiin tässä laajentaa koko $\mathbb{R}^n$:ään, koska $\mu(x) - \lambda(x) = 0$ joukon J ulkopuolella. Toisaalta muistetaan lauseen 4.1.5 todistuksesta, että jos $\lambda(x) < t < \mu(x)$, niin $x \in \partial_* F_t$. Muistamalla vielä lauseesta 3.2.4, että $\|\partial F_t\| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* F_t$, ja käyttämällä BV-funktioiden coarea-kaavaa saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\{x \in J \mid \lambda(x) < t < \mu(x)\}) dt &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial_* F_t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* F_t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \|\partial F_t\|(\mathbb{R}^n) dt \\
&= \|Df\|(\mathbb{R}^n) < \infty,
\end{aligned}$$

sillä $f \in BV(\mathbb{R}^n)$. Yhdistämällä tämä yhtälöön (4.4) voidaan päätellä, että on oltava

$$\mathcal{H}^{n-1}(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mu(x) - \lambda(x) = \infty\}) = 0.$$

□

Merkitään jatkossa joukkoa, jossa $|\lambda(x)| = \infty$ tai $|\mu(x)| = \infty$, symbolilla I. Juuri todistetun lauseen nojalla $\mathcal{H}^{n-1}(I) = 0$.

4.2 Lebesguen lause BV-funktioille

Nyt päästään vihdoin todistamaan Lebesguen lause BV-funktioille.

Lause 4.2.1. *Olkoon $f \in BV(\mathbb{R}^n)$. Silloin*

(i) $\mathcal{H}^{n-1}$*-m.k.* $x \in \mathbb{R}^n \setminus J$ *pätee*

$$\lim_{r \to 0} \fint_{\bar{B}(x,r)} |f - \kappa(x)|^{n/(n-1)} dy = 0,$$

ja lisäksi

(ii) $\mathcal{H}^{n-1}$*-m.k.* $x \in J$ *pätee sopivasti valitulla yksikkövektorilla* $\nu = \nu(x)$

$$\lim_{r \to 0} \fint_{\bar{B}(x,r) \cap H_\nu^-} |f - \mu(x)|^{n/(n-1)} dy = 0$$

ja

$$\lim_{r \to 0} \fint_{\bar{B}(x,r) \cap H_\nu^+} |f - \lambda(x)|^{n/(n-1)} dy = 0.$$

Todistus. Oletetaan, että $x \in \mathbb{R}^n \setminus (J \cup I)$ (muistetaan joukon I määritelmä edellisen alaluvun lopusta), jolloin $\lambda(x) = \mu(x) = \kappa(x) \in \mathbb{R}$. Lauseen 4.1.7 mukaan tämä oletus pätee $\mathcal{H}^{n-1}$-m.k. $x \in \mathbb{R}^n \setminus J$. Jos valitaan $M > |\kappa(x)|$, voidaan laskea

$$
\begin{aligned}
&\fint_{\bar{B}(x,r)} |f-\kappa(x)|^{n/(n-1)} dy \\
&\quad \le \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{\bar{B}(x,r)} \varepsilon^{n/(n-1)} dy \\
&\quad\quad + \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{\bar{B}(x,r)\cap\{|f-\kappa(x)|>\varepsilon\}} |f-\kappa(x)|^{n/(n-1)} dy \\
&\quad = \varepsilon^{n/(n-1)} + \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{\bar{B}(x,r)\cap\{2M\ge|f-\kappa(x)|>\varepsilon\}} |f-\kappa(x)|^{n/(n-1)} dy \\
&\quad\quad + \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{\bar{B}(x,r)\cap\{|f-\kappa(x)|>2M\}} |f-\kappa(x)|^{n/(n-1)} dy, \\
&\quad \le \varepsilon^{n/(n-1)} + \frac{\mathcal{L}^n(\bar{B}(x,r)\cap\{|f-\kappa(x)|>\varepsilon\})}{\Omega_n r^n} (2M)^{n/(n-1)} \\
&\quad\quad + \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{\bar{B}(x,r)\cap\{|f-\kappa(x)|>2M\}} |f-\kappa(x)|^{n/(n-1)} dy.
\end{aligned}
$$

Jos muistetaan approksimatiivisen raja-arvon $\kappa(x)$ määritelmä, saadaan nyt

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0} \fint_{\bar{B}(x,r)} |f-\kappa(x)|^{n/(n-1)} dy \\
&\quad \le \varepsilon^{n/(n-1)} + \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{\bar{B}(x,r)\cap\{|f-\kappa(x)|>2M\}} |f-\kappa(x)|^{n/(n-1)} dy.
\end{aligned}
$$

Koska tässä $\varepsilon > 0$ voidaan valita mielivaltaisen pieneksi, saadaan

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0} \fint_{\bar{B}(x,r)} |f-\kappa(x)|^{n/(n-1)} dy \\
&\quad \le \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{\bar{B}(x,r)\cap\{|f-\kappa(x)|>2M\}} |f-\kappa(x)|^{n/(n-1)} dy. \\
&\quad \le \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{\bar{B}(x,r)\cap\{|f|>M\}} |f-\kappa(x)|^{n/(n-1)} dy. \\
&\quad \le \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{\bar{B}(x,r)\cap\{f>M\}} |f-\kappa(x)|^{n/(n-1)} dy. \\
&\quad\quad + \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{\bar{B}(x,r)\cap\{f<-M\}} |f-\kappa(x)|^{n/(n-1)} dy. \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

Yleisesti, jos $a, b \ge 0$, pätee $(a+b)^{n/(n-1)} \le C(n)(a^{n/(n-1)} + b^{n/(n-1)})$ [4, s.

226], joten voidaan laskea

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Omega_n r^n}\int_{\bar{B}(x,r)\cap\{f>M\}} |f-\kappa(x)|^{n/(n-1)}dy \\
&\quad= \frac{1}{\Omega_n r^n}\int_{\bar{B}(x,r)\cap\{f>M\}} |(f-M)^+ + (M-\kappa(x))|^{n/(n-1)}dy \\
&\quad\le C(n)\Bigg(\frac{1}{\Omega_n r^n}\int_{\bar{B}(x,r)\cap\{f>M\}} |(f-M)^+|^{n/(n-1)}dy \\
&\qquad+\frac{1}{\Omega_n r^n}\int_{\bar{B}(x,r)\cap\{f>M\}} |M-\kappa(x)|^{n/(n-1)}dy\Bigg),
\end{aligned}$$

missä jälkimmäiselle termille pätee

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0}\frac{1}{\Omega_n r^n}\int_{\bar{B}(x,r)\cap\{f>M\}} |M-\kappa(x)|^{n/(n-1)}dy \\
&\quad\le \limsup_{r\to 0}\frac{\mathcal{L}^n(\bar{B}(x,r)\cap\{f>M\})}{\Omega_n r^n}|M-\kappa(x)|^{n/(n-1)} = 0,
\end{aligned}$$

sillä $M>\kappa(x)$. Saadaan siis edelleen

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0}\frac{1}{\Omega_n r^n}\int_{\bar{B}(x,r)\cap\{f>M\}} |f-\kappa(x)|^{n/(n-1)}dy \\
&\quad\le C(n)\limsup_{r\to 0}\fint_{\bar{B}(x,r)} ((f-M)^+)^{n/(n-1)}dy. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Tässä $(f-M)^+ \in BV(\mathbb{R}^n)$ (tämä osoitetaan myöhemmin sivulla 51). Koska nyt

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{L}^n(\bar{B}(x,r)\cap\{f>M\})}{r^n} = 0,$$

pätee

$$\frac{\mathcal{L}^n(\bar{B}(x,r)\cap\{f>M\})}{r^n} \le \frac{1}{2}$$

kyllin pienillä $r>0$, jolloin edelleen

$$\frac{\mathcal{L}^n(\bar{B}(x,r)\cap\{(f-M)^+=0\})}{r^n} \ge \frac{1}{2}.$$

Näillä r:n arvoilla pätee [1, s. 189]

$$\left(\int_{\bar{B}(x,r)} ((f-M)^+)^{n/(n-1)}dy\right)^{(n-1)/n} \le C(n)\|D((f-M)^+)\|(B(x,r)),$$

joten

$$\left(\fint_{\bar{B}(x,r)}((f-M)^+)^{n/(n-1)}dy\right)^{(n-1)/n} \leq \frac{C(n)}{r^{n-1}}\|D((f-M)^+)\|(B(x,r)). \tag{4.7}$$

Kaavan (4.5) viimeisen rivin termille saadaan vastaavasti laskettua

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0}\frac{1}{\Omega_n r^n}\int_{\bar{B}(x,r)\cap\{f<-M\}}|f-\kappa(x)|^{n/(n-1)}dy\\
&\quad\leq \limsup_{r\to 0} C(n)\left(\frac{1}{\Omega_n r^n}\int_{\bar{B}(x,r)\cap\{f<-M\}}((f+M)^-)^{n/(n-1)}dy\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{\Omega_n r^n}\int_{\bar{B}(x,r)\cap\{f<-M\}}|-M-\kappa(x)|^{n/(n-1)}dy\right)\\
&\quad= \limsup_{r\to 0} C(n)\fint_{\bar{B}(x,r)}((f+M)^-)^{n/(n-1)}dy.
\end{aligned}$$

Edelleen

$$\left(\fint_{\bar{B}(x,r)}((f+M)^-)^{n/(n-1)}dy\right)^{(n-1)/n} \leq \frac{C(n)}{r^{n-1}}\|D((f+M)^-)\|(B(x,r))$$

kyllin pienillä $r>0$. Yhdistämällä tämä ja aiemmat kaavat (4.6) ja (4.7) kaavaan (4.5) saadaan kaiken kaikkiaan

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0}\left(\fint_{\bar{B}(x,r)}|f-\kappa(x)|^{n/(n-1)}dy\right)^{(n-1)/n}\\
&\quad\leq \limsup_{r\to 0}\frac{C(n)}{r^{n-1}}\|D((f-M)^+)\|(B(x,r))\\
&\quad+\limsup_{r\to 0}\frac{C(n)}{r^{n-1}}\|D((f+M)^-)\|(B(x,r))
\end{aligned}\tag{4.8}$$

kaikilla $M>|\kappa(x)|$. BV-funktioiden coarea-kaavan perusteella pätee

$$\|D((f-M)^+)\|(B(x,r)) = \int_{-\infty}^{\infty}\|\partial\tilde{F}_t\|(B(x,r))dt,$$

missä

$$\tilde{F}_t = \{(f-M)^+>t\} = \begin{cases}\{f-M>t\}=\{f>M+t\}, & \text{kun } t\geq 0,\\ \mathbb{R}^n, & \text{kun } t<0.\end{cases}$$

Saadaan siis edelleen

$$\begin{aligned}\|D((f-M)^+)\|(B(x,r)) &= \int_0^\infty \|\partial\tilde{F}_t\|(B(x,r))dt\\ &= \int_0^\infty \|\partial F_{t+M}\|(B(x,r))dt\\ &= \int_M^\infty \|\partial F_t\|(B(x,r))dt.\end{aligned}$$

Näin voidaan todeta, että $\|D((f-M)^+)\|(B(x,r))$ on M:n suhteen vähenevä funktio, kun $M>0$. Korvaamalla tässä $B(x,r)\hookrightarrow\mathbb{R}^n$ nähdään myös, että

$$\int_{-\infty}^\infty \|\partial\tilde{F}_t\|(\mathbb{R}^n)dt = \int_M^\infty \|\partial F_t\|(\mathbb{R}^n)dt < \infty,$$

sillä $f\in BV(\mathbb{R}^n)$, joten tämän ja coarea-kaavan perusteella myös $(f-M)^+\in BV(\mathbb{R}^n)$ kaikilla $M>0$. Samaan tapaan nähdään, että $(f+M)^-\in BV(\mathbb{R}^n)$ ja että $\|D((f+M)^-)\|(B(x,r))$ on M:n suhteen vähenevä funktio, kun $M>0$, sillä

$$\|D((f+M)^-)\|(B(x,r)) = \int_{-\infty}^\infty \|\partial\tilde{F}_t\|(B(x,r))dt,$$

missä merkitään

$$\tilde{F}_t = \{(f+M)^- > t\} = \begin{cases}\{f+M<-t\} = \{-f > M+t\} =: F^-_{t+M}, & \text{kun } t\geq 0,\\ \mathbb{R}^n, & \text{kun } t<0.\end{cases}$$

Siispä saadaan edelleen

$$\begin{aligned}\|D((f+M)^-)\|(B(x,r)) &= \int_0^\infty \|\partial F^-_{t+M}\|(B(x,r))dt\\ &= \int_M^\infty \|\partial F^-_t\|(B(x,r))dt,\end{aligned}$$

eli myös $\|D((f+M)^-)\|(B(x,r))$ on M:n suhteen vähenevä funktio. Nyt voidaan epäyhtälö (4.8) muistaen todeta, että

$$\left\{x\in\mathbb{R}^n\setminus(J\cup I)\mid \limsup_{r\to 0}\left(⨍_{\bar{B}(x,r)}|f-\kappa(x)|^{n/(n-1)}dy\right)^{\frac{n-1}{n}} > 0\right\}\subset\bigcup_{i=1}^\infty A_i\cup\tilde{A}_i,$$

missä

$$A_i = \left\{x\in\mathbb{R}^n\mid \limsup_{r\to 0}\frac{\|D((f-M)^+)\|(B(x,r))}{r^{n-1}} > \frac{1}{i}\ \text{ kaikilla } M>|\kappa(x)|\right\}$$

ja

$$\tilde{A}_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{r \to 0} \frac{\|D((f+M)^-)\|(B(x,r))}{r^{n-1}} > \frac{1}{i} \text{ kaikilla } M > |\kappa(x)| \right\}.$$

Funktioiden $\|D((f-M)^+)\|(B(x,r))$ ja $\|D((f+M)^-)\|(B(x,r))$ vähenevyyden perusteella voidaan edelleen määritellä joukot

$$C_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{r \to 0} \frac{\|D((f-M)^+)\|(\bar{B}(x,r))}{r^{n-1}} > \frac{1}{i} \text{ kaikilla } M > 0 \right\}$$

ja

$$\tilde{C}_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{r \to 0} \frac{\|D((f+M)^-)\|(\bar{B}(x,r))}{r^{n-1}} > \frac{1}{i} \text{ kaikilla } M > 0 \right\},$$

missä $C_i \supset A_i$ ja $\tilde{C}_i \supset \tilde{A}_i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Valitaan nyt $i \in \mathbb{N}$ ja tutkitaan joukkoa C_i. Otetaan mielivaltainen $M > 0$, ja $\delta > 0$. Joukolle C_i saadaan peite

$$\mathcal{B} = \{\bar{B}(x,r) \,|\, x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < r < \delta,\ r^{n-1} < i\|D((f-M)^+)\|(\bar{B}(x,r))\}.$$

Tuttuun tapaan Vitalin peitelause antaa numeroituvan kokoelman pistevieraita palloja $\{\bar{B}(x^j, r_j)\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ s.e.

$$C_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{B}(x^j, 5r_j).$$

Nyt voidaan laskea

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{n-1}_{10\delta}(C_i) &\le \sum_{j=1}^{\infty} \Omega_{n-1}(5r_j)^{n-1} \\
&= C(n) \sum_{j=1}^{\infty} r_j^{n-1} \\
&\le C(n) i \sum_{j=1}^{\infty} \|D((f-M)^+)\|(\bar{B}(x^j, r_j)) \\
&\le C(n) i \|D((f-M)^+)\|(\mathbb{R}^n) \\
&= C(n) i \int_M^{\infty} \|\partial F_t\|(\mathbb{R}^n) dt.
\end{aligned}$$

Tämä siis pätee kaikilla $M > 0$. Toisaalta on oltava

$$\lim_{M \to \infty} \int_M^{\infty} \|\partial F_t\|(\mathbb{R}^n) dt = 0,$$

sillä

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\partial F_t\|(\mathbb{R}^n)dt = \|Df\|(\mathbb{R}^n) < \infty.$$

Siis $\mathcal{H}^{n-1}_{10\delta}(C_i) = 0$ ja siten $\mathcal{H}^{n-1}(C_i) = 0$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Samaan tapaan nähdään, että $\mathcal{H}^{n-1}(\tilde{C}_i) = 0$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Tämä todistaa väitteen (i).

Tarkastellaan sitten väitettä (ii). Muistetaan, että lauseen 4.1.5 mukaan

$$J \subset \bigcup_{t \in A} \partial_* F_t,$$

missä $A \subset \mathbb{R}$ on numeroituva joukko. Edelleen muistetaan, että pätee $\mathcal{H}^{n-1}(I) = 0$ ja $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* F_t \setminus \partial^* F_t) = 0$ kaikilla $t \in A$. Jos merkitään

$$P := \bigcup_{t \in A} (\partial_* F_t \setminus \partial^* F_t) \cup I,$$

saadaan $\mathcal{H}^{n-1}(P) = 0$. Voidaan siis $\mathcal{H}^{n-1}$-m.k. $x \in J$ olettaa, että $x \in J \setminus P$.

Otetaan nyt piste $x \in J \setminus P$. Koska $\lambda(x) < \mu(x)$, pätee $x \in \partial_* F_t$ kaikilla $t \in (\lambda(x), \mu(x))$, ja siten kaikilla $t \in (\lambda(x), \mu(x)) \cap A$. Yllä olevan oletuksen nojalla pätee itse asiassa $x \in \partial^* F_t$ kaikilla $t \in (\lambda(x), \mu(x)) \cap A$. Kaikilla tällaisilla t:n arvoilla joukolle F_t löytyy pisteessä x korollaarin 2.3.2 nojalla yksikkövektori $\nu^*_{F_t}(x)$, jolle pätee tuttuun tapaan

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(F_t \cap H^-_{\nu^*_{F_t}(x)}(x) \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} = \frac{1}{2}$$

ja

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(F_t \cap H^+_{\nu^*_{F_t}(x)}(x) \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} = 0.$$

Koska täten joukon F_t tiheys "miinus-puolella" on nolla ja "plus-puolella" yksi, todetaan, että $\nu^*_{F_t}(x)$:n korvaaminen millä tahansa muulla yksikkövektorilla tekee ensimmäisestä raja-arvosta 1/2:ta pienemmän ja toisesta 0:aa suuremman. Jos nyt toisaalta valitaan $s \in (\lambda(x), \mu(x)) \cap A$ s.e. $s > t$, pätee vastaavasti

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(F_s \cap H^-_{\nu^*_{F_s}(x)}(x) \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} = \frac{1}{2},$$

mutta koska $F_s \subset F_t$, pätee myös

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(F_s \cap H^-_{\nu^*_{F_s}(x)}(x) \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} \leq \lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(F_t \cap H^-_{\nu^*_{F_s}(x)}(x) \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} \leq \frac{1}{2},$$

joten yllä olevan päättelyn perusteella on välttämättä oltava $\nu^*_{F_s}(x) = \nu^*_{F_t}(x)$. Koska tässä ei luvuista $s, t \in (\lambda(x), \mu(x)) \cap A$ oletettu muuta kuin $s > t$, pätee $\nu^*_{F_s}(x) = \nu^*_{F_t}(x)$ kaikilla $s, t \in (\lambda(x), \mu(x)) \cap A$. Merkitään tätä yksikkövektoria symbolilla ν. Nyt siis pätee

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{f > \lambda(x) + \varepsilon\} \cap H^+_\nu(x) \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} = 0 \tag{4.9}$$

kaikilla $\varepsilon > 0$ — tässä ei tietenkään tarvitse enää rajoittua lukuihin $\lambda(x) + \varepsilon \in (\lambda(x), \mu(x)) \cap A$. Toisaalta suoraan approksimatiivisen $\liminf$:in määritelmän nojalla

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{f < \lambda(x) - \varepsilon\} \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} = 0 \tag{4.10}$$

kaikilla $\varepsilon > 0$. Edelleen korollaarin 2.3.2 nojalla

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n((\mathbb{R}^n \setminus F_t) \cap H^-_{\nu^*_{F_t}(x)}(x) \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} = 0$$

kaikilla $t \in (\lambda(x), \mu(x)) \cap A$. Tässä yksikkövektori on taas vakio t:n suhteen: $\nu^*_{F_t}(x) = \nu$. Tämän perusteella

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{f < \mu(x) - \varepsilon\} \cap H^-_\nu(x) \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} = 0 \tag{4.11}$$

kaikilla $\varepsilon > 0$, ja toisaalta suoraan approksimatiivisen $\limsup$:in määritelmän nojalla

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{f > \mu(x) + \varepsilon\} \cap \bar{B}(x,r))}{r^n} = 0. \tag{4.12}$$

kaikilla $\varepsilon > 0$. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$. Nyt voidaan lähteä laskemaan kohdan (i) tapaan

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\Omega_n r^n} \int_{\bar{B}(x,r)\cap H^+_\nu} |f - \lambda(x)|^{n/(n-1)} dy \\
&\quad \le \varepsilon^{n/(n-1)} \\
&\quad + \frac{2}{\Omega_n r^n} \int_{\bar{B}(x,r)\cap H^+_\nu \cap \{f > \lambda(x)+\varepsilon\}} |f - \lambda(x)|^{n/(n-1)} dy \\
&\quad + \frac{2}{\Omega_n r^n} \int_{\bar{B}(x,r)\cap H^+_\nu \cap \{f < \lambda(x)-\varepsilon\}} |f - \lambda(x)|^{n/(n-1)} dy
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Valitaan sitten $M > 0$ s.e. $M > \lambda(x) + \varepsilon$ ja $-M < \lambda(x) - \varepsilon$ (muistetaan, että $|\lambda(x)| < \infty$). Nyt voidaan viimeistä edellisen rivin termiä arvioida

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\Omega_n r^n} \int_{\bar{B}(x,r)\cap H^+_\nu \cap \{f > \lambda(x)+\varepsilon\}} |f - \lambda(x)|^{n/(n-1)} dy \\
&\quad \le 2|M - \lambda(x)|^{n/(n-1)} \frac{\mathcal{L}^n(\{f > \lambda(x) + \varepsilon\} \cap H^+_\nu \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} \\
&\quad + \frac{2}{\Omega_n r^n} \int_{\bar{B}(x,r)\cap \{f > M\}} |f - \lambda(x)|^{n/(n-1)} dy.
\end{aligned}$$

Tässä ensimmäinen termi menee yhtälön (4.9) nojalla nollaan, kun $r \to 0$. Epäyhtälön (4.13) toista termiä voidaan arvioida vastaavasti

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\Omega_n r^n} \int_{\bar{B}(x,r)\cap H_\nu^+ \cap \{f<\lambda(x)-\varepsilon\}} |f-\lambda(x)|^{n/(n-1)} dy \\
&\quad \leq 2|-M-\lambda(x)|^{n/(n-1)} \frac{\mathcal{L}^n(\{f<\lambda(x)-\varepsilon\}\cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} \\
&\quad\quad + \frac{2}{\Omega_n r^n} \int_{\bar{B}(x,r)\cap\{f<-M\}} |f-\lambda(x)|^{n/(n-1)} dy.
\end{aligned}$$

Tässä ensimmäinen termi menee yhtälön (4.10) nojalla nollaan, kun $r \to 0$. Antamalla vielä $\varepsilon \to 0$ saadaan kaavasta (4.13) kaiken kaikkiaan

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0} ⨍_{\bar{B}(x,r)\cap H_\nu^+} |f-\lambda(x)|^{n/(n-1)} dy \\
&\quad \leq \limsup_{r\to 0} \frac{2}{\Omega_n r^n} \int_{\bar{B}(x,r)\cap\{|f|>M\}} |f-\lambda(x)|^{n/(n-1)} dy. \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Tässä on ensinnäkin

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\Omega_n r^n} \int_{\{f>M\}\cap\bar{B}(x,r)} |f-\lambda(x)|^{n/(n-1)} dy \\
&\quad = \frac{2}{\Omega_n r^n} \int_{\{f>M\}\cap\bar{B}(x,r)} |(f-M)^+ + (M-\lambda(x))|^{n/(n-1)} dy \\
&\quad \leq \frac{2C(n)}{\Omega_n r^n} \left(\int_{\{f>M\}\cap\bar{B}(x,r)} ((f-M)^+)^{n/(n-1)} dy \right. \\
&\quad\quad \left. + \int_{\{f>M\}\cap\bar{B}(x,r)} (M-\lambda(x))^{n/(n-1)} dy \right) \\
&\quad \leq \frac{2C(n)}{\Omega_n r^n} \int_{\bar{B}(x,r)} ((f-M)^+)^{n/(n-1)} dy \\
&\quad\quad + 2C(n)(M-\lambda(x))^{n/(n-1)} \frac{\mathcal{L}^n(\{f>M\}\cap\bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n}.
\end{aligned}$$

Jos nyt oletetaan vielä, että $M > \mu(x)$ (muistetaan, että $|\mu(x)| < \infty$), niin jälkimmäinen termi menee nollaan, kun $r \to 0$, sillä

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{f>M\}\cap\bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} = 0.$$

Tämä myös kertoo, että

$$\frac{\mathcal{L}^n(\{f>M\}\cap\bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} \leq \frac{1}{2}$$

kyllin pienillä $r > 0$. Tämä on sama kuin

$$\frac{\mathcal{L}^n(\{(f-M)^+ = 0\} \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} \geq \frac{1}{2}$$

kyllin pienillä $r > 0$. Kuten kohdan (i) todistuksessa, pätee taas [1, s. 189]

$$\left(\frac{2C(n)}{\Omega_n r^n}\int_{\bar{B}(x,r)}((f-M)^+)^{n/(n-1)}dy\right)^{(n-1)/n} \leq \frac{C(n)}{r^{n-1}}\|D((f-M)^+)\|(B(x,r)).$$

Samaan tyyliin voidaan laskea

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\Omega_n r^n}\int_{\{f<-M\}\cap\bar{B}(x,r)}|f-\lambda(x)|^{n/(n-1)}dy \\
&\quad\leq \frac{2C(n)}{\Omega_n r^n}\left(\int_{\{f<-M\}\cap\bar{B}(x,r)}((f+M)^-)^{n/(n-1)}dy\right. \\
&\qquad\left.+\int_{\{f<-M\}\cap\bar{B}(x,r)}|-M-\lambda(x)|^{n/(n-1)}dy\right) \\
&\quad\leq \frac{2C(n)}{\Omega_n r^n}\int_{\bar{B}(x,r)}((f+M)^-)^{n/(n-1)}dy \\
&\qquad+2C(n)|M+\lambda(x)|^{n/(n-1)}\frac{\mathcal{L}^n(\{f<-M\}\cap\bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n}.
\end{aligned}$$

Oletuksen mukaan $-M < \lambda(x)$, joten jälkimmäinen termi menee tässäkin nollaan, kun $r \to 0$, sillä

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{L}^n(\{f<-M\}\cap\bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} = 0.$$

Edelleen

$$\left(\frac{2C(n)}{\Omega_n r^n}\int_{\bar{B}(x,r)}((f+M)^-)^{n/(n-1)}dy\right)^{(n-1)/n} \leq \frac{C(n)}{r^{n-1}}\|D((f+M)^-)\|(B(x,r))$$

kyllin pienillä $r > 0$. Yhteensä saadaan epäyhtälöstä (4.14), että

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0}\left(\fint_{\bar{B}(x,r)\cap H_\nu^+}|f-\lambda(x)|^{n/(n-1)}dy\right)^{(n-1)/n} \\
&\quad\leq \limsup_{r\to 0}\frac{C(n)}{r^{n-1}}\|D((f-M)^+)\|(B(x,r)) \\
&\quad+\limsup_{r\to 0}\frac{C(n)}{r^{n-1}}\|D((f+M)^-)\|(B(x,r))
\end{aligned}$$

kaikilla $M > \max\{|\lambda(x)|, \mu(x)\}$. Väitteen (i) todistuksessa jo näytettiin, että yllä olevat kaksi termiä ovat nollia $\mathcal{H}^{n-1}$-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$, kun vaatimus oli $M > |\kappa(x)|$. Päättely ei muutu lainkaan tästä ehdosta riippuen, joten näin saadaan todistettua väitteen (ii) ensimmäinen osa. Toinen osa voidaan todistaa samanlaisilla laskuilla, ja myös vektori $\nu = \nu(x)$ tulee kaavojen (4.11) ja (4.12) nojalla olemaan sama. □

4.3 Pohdintaa

Selvitetään nyt hieman lauseen 4.2.1 väitteiden ja niiden seurauksien merkitystä. Vahvimman tuloksen lause antaa selvästi pisteille $x \in \mathbb{R}^n \setminus J$ ($\mathcal{H}^{n-1}$-nollamittaista joukkoa lukuunottamatta), joten tarkastellaan ensin hieman joukon J suuruutta. Heti tiedetään, että $\mathcal{L}^n(J) = 0$, sillä $\mathcal{L}^n$-mitallinen funktio on approksimatiivisesti jatkuva $\mathcal{L}^n$-melkein kaikkialla [1, s. 47]. ("$\mathcal{L}^n$-mitallinen funktio" oletetaan tässä reaaliarvoiseksi — mutta toisaalta integroituva funktio saa tietenkin arvoja $\pm\infty$ vain $\mathcal{L}^n$-nollamittaisessa joukossa.) Toisaalta korollaarin 4.1.6 mukaan joukko J on σ-äärellinen mitan $\mathcal{H}^{n-1}$ suhteen $\mathbb{R}^n$:ssä, eli J voidaan esittää muodossa

$$J = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i,$$

missä $\mathcal{H}^{n-1}(J_i) < \infty$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Tämä tarkoittaa [1, s. 65], että $\mathcal{H}^{n-1+\delta}(J_i) = 0$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja $\delta > 0$. Siis

$$\mathcal{H}^{n-1+\delta}(J) = \mathcal{H}^{n-1+\delta}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1+\delta}(J_i) = 0$$

kaikilla $\delta > 0$. Joukko J on siis olennaisesti "pienempi" kuin yleinen $\mathcal{L}^n$-nollamittainen joukko. Toisaalta on huomattava, että koska BV-funktiot määritellään vain $\mathcal{L}^n$-nollamittaisia joukkoja lukuunottamatta, ei BV-funktioiden approksimatiiviselle jatkuvuudelle voida saada parempaa tulosta kuin mitä saadaan yleiselle $\mathcal{L}^n$-mitalliselle funktiolle. Sen sijaan λ ja μ ovat pisteittäin määriteltyjä funktioita, joten myös J on pisteittäin hyvin määritelty joukko. Edelleen approksimatiivinen raja-arvo $\kappa(x)$ on pisteittäin määritelty lukuunottamatta määrättyä $\mathcal{L}^n$-nollamittaista joukkoa (jossa $\kappa(x)$ voidaan tarvittaessa määritellä vaikkapa nollaksi). Koska BV-funktio on $\mathcal{L}^n$-mitallisena approksimatiivisesti jatkuva $\mathcal{L}^n$-melkein kaikkialla, pätee

$$f(x) = \kappa(x) = \lambda(x) = \mu(x)$$

$\mathcal{L}^n$-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$. Kolme jälkimmäistä ovat siis kaikki käypiä funktion $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ (pisteittäin määriteltyjä) edustajia. Erityisesti edustaja $\kappa(x)$ on approksimatiivisesti jatkuva joukossa $\mathbb{R}^n \setminus (J \cup I)$, missä $\mathcal{H}^{n-1+\delta}(J \cup I) = 0$ kaikilla $\delta > 0$. Tämä on paljon vahvempi tulos kuin mitä saadaan yleiselle $\mathcal{L}^n$-mitalliselle funktiolle. Edelleen $\mathcal{H}^{n-1}$-m.k. $x \in \mathbb{R}^n \setminus (J \cup I)$ pätee lauseen 4.2.1

ja Hölderin epäyhtälön nojalla

$$\lim_{r\to 0} ⨍_{\bar{B}(x,r)} |f-\kappa(x)|dy \le \lim_{r\to 0} \left(⨍_{\bar{B}(x,r)} |f-\kappa(x)|^{n/(n-1)} dy \right)^{(n-1)/n} = 0.$$

Tämä tarkoittaa, että nämä kaikki ovat Lebesguen pisteitä esimerkiksi lähteessä [4, s. 458] käytettävän määritelmän mukaan. Huomautettakoon, että Lebesguen pisteet määritellään joskus (ks. esim. [1, s. 44]) vaatimalla, että itseisarvojen sisällä oleva erotus on $f - f(x)$, eikä yleinen $f - a$ sopivasti valitulla $a \in \mathbb{R}$. Nähdään, että nyt tällainen vaatimus heikentäisi saatuja tuloksia huomattavasti, sillä $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ voi olla mitä tahansa $\mathcal{L}^n$-nollamittaisessa joukossa. Nyt siis saatu tulos on kuitenkin huomattavasti vahvempi kuin yleisille L^1-funktioille saatava tulos, jonka mukaan kaikki $\mathbb{R}^n$:n pisteet $\mathcal{L}^n$-nollamittaista joukkoa lukuunottamatta ovat Lebesguen pisteitä. Toisaalta tulos on (luonnollisesti) heikompi kuin Sobolevin funktioille, joille saadaan: jos $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < n$, kaikki $\mathbb{R}^n$:n pisteet $\mathcal{H}^s$-nollamittaista joukkoa lukuunottamatta ovat Lebesguen pisteitä, missä s:n tulee toteuttaa $s > n - p$ [1, s. 156, 160–162].

Jos toisaalta $x \in J$, x ei tietenkään voi olla approksimatiivisen jatkuvuuden piste, sillä $\lambda(x) \neq \mu(x)$. Samoin x ei voi olla Lebesguen piste, mikä nähdään seuraavasti. Jos jollain $a \in \mathbb{R}$ olisi

$$\lim_{r\to 0} ⨍_{\bar{B}(x,r)} |f-a|dy = 0,$$

pätisi myös

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{|f-a| > \varepsilon\} \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} \le \frac{1}{\varepsilon} \lim_{r\to 0} ⨍_{\bar{B}(x,r)} |f-a|dy = 0$$

kaikilla $\varepsilon > 0$. Siis approksimatiivinen raja-arvo olisi olemassa pisteessä x.

Lauseesta 4.2.1 kuitenkin nähdään, että myös $\mathcal{H}^{n-1}$-m.k. $x \in J$ ovat ”toispuoleisia” Lebesguen pisteitä. Määritellään siis:

$$\operatorname{ap} \lim_{\substack{y\to x\\ y\in A}} f(y) = t,$$

jos

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{y \in A \,|\, |f(y)-t| > \varepsilon\} \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} = 0$$

kaikilla $\varepsilon > 0$, ja joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ tiheys pisteessä x ei ole nolla. Nyt

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{y \in H_\nu^+(x) \,|\, |f-\lambda(x)| > \varepsilon\} \cap \bar{B}(x,r))}{\Omega_n r^n} \\
&\leq \lim_{r\to 0} \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{H_\nu^+(x)\cap \bar{B}(x,r)} \frac{|f-\lambda(x)|}{\varepsilon} dy \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \frac{1}{\frac{1}{2}\Omega_n r^n} \int_{H_\nu^+(x)\cap \bar{B}(x,r)} |f-\lambda(x)| dy \\
&= \frac{1}{2\varepsilon} \lim_{r\to 0} \left(⨍_{H_\nu^+(x)\cap \bar{B}(x,r)} |f-\lambda(x)|^{n/(n-1)} dy \right)^{(n-1)/n} = 0
\end{aligned}$$

$\mathcal{H}^{n-1}$-m.k. $x \in J$, eli

$$\operatorname{ap} \lim_{\substack{y\to x \\ y\in H_\nu^+(x)}} f(y) = \lambda(x)$$

$\mathcal{H}^{n-1}$-m.k. $x \in J$. Samaan tyyliin voidaan osoittaa, että

$$\operatorname{ap} \lim_{\substack{y\to x \\ y\in H_\nu^-(x)}} f(y) = \mu(x)$$

$\mathcal{H}^{n-1}$-m.k. $x \in J$. Näin siis nähdään, että BV-funktiossa esiintyy "hyppäyksiä" (joiden suuruus on $\mu(x) - \lambda(x)$) yli C^1-hyperpintojen, joista joukko J lauseen 4.1.5 mukaan koostuu. Tätä intuitiota vahvistaa vielä seuraava tulos: jos funktiolla on approksimatiivinen raja-arvo a pisteessä x, on olemassa $\mathcal{L}^n$-mitallinen joukko $A \subset \mathbb{R}^n$, jonka tiheys pisteessä x on yksi, ja funktion rajoittumalla joukkoon A on (klassinen) raja-arvo a pisteessä x [2, s. 250].

Määritellään lopuksi vielä yksi f:n edustaja

$$\xi(x) := \frac{\lambda(x) + \mu(x)}{2}.$$

Tämä saa äärellisiä arvoja aina, kun $x \notin I$, eli $\mathcal{H}^{n-1}$-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$. Pisteille $x \in \mathbb{R}^n \setminus (J \cup I)$ pätee nyt $\kappa(x) = \xi(x)$. Jos käytetään integraalikeskiarvosta merkintää f_G, missä $G \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^{n-1}$-melkein kaikille näistä pisteistä saadaan

$$\lim_{r\to 0} |f_{\bar{B}(x,r)} - \kappa(x)| = \lim_{r\to 0} |⨍_{\bar{B}(x,r)} f dy - \kappa(x)| \leq \lim_{r\to 0} ⨍_{\bar{B}(x,r)} |f - \kappa(x)| dy = 0.$$

Lauseen 4.2.1 avulla puolestaan saadaan $\mathcal{H}^{n-1}$-m.k. $x \in J$

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} |f_{\bar{B}(x,r)} - \xi(x)| &= \lim_{r\to 0} | \fint_{\bar{B}(x,r)} f dy - \xi(x)| \\
&= \lim_{r\to 0} | \frac{1}{2} \fint_{\bar{B}(x,r)\cap H_\nu^-(x)} f dy + \frac{1}{2} \fint_{\bar{B}(x,r)\cap H_\nu^+(x)} f dy - \frac{\lambda(x)+\mu(x)}{2} | \\
&\leq \lim_{r\to 0} \frac{1}{2} \fint_{\bar{B}(x,r)\cap H_\nu^+(x)} |f - \lambda(x)| dy + \lim_{r\to 0} \frac{1}{2} \fint_{\bar{B}(x,r)\cap H_\nu^-(x)} |f - \mu(x)| dy \\
&\leq \lim_{r\to 0} \frac{1}{2} \left(\fint_{\bar{B}(x,r)\cap H_\nu^+(x)} |f - \lambda(x)|^{n/(n-1)} dy \right)^{(n-1)/n} \\
&\quad + \lim_{r\to 0} \frac{1}{2} \left(\fint_{\bar{B}(x,r)\cap H_\nu^-(x)} |f - \mu(x)|^{n/(n-1)} dy \right)^{(n-1)/n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Yhteensä siis $\lim_{r\to 0} f_{\bar{B}(x,r)} = \xi(x)$ $\mathcal{H}^{n-1}$-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$. Tämä tarkoittaa, että f:n *tarkka edustaja* $f^*(x) := \lim_{r\to 0} f_{\bar{B}(x,r)}$ (joka luonnollisesti kelpaa myös f:n edustajaksi) saa äärellisen arvon $\mathcal{H}^{n-1}$-m.k. $x \in \mathbb{R}^n$. Tämä antaa luontevan tavan määritellä BV-funktio myös $\mathcal{L}^n$-nollamittaisissa joukoissa. Erityisesti saadaan mahdollinen tapa määritellä BV-funktion jälki funktion määrittelyalueen (jos se on rajoitettu joukko) reunalla [2, s. 255–].

Kirjallisuutta

[1] Evans, Lawrence C.; Gariepy, Ronald F. *Measure theory and fine properties of functions.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992. viii+268 pp. ISBN: 0-8493-7157-0 (Reviewer: R. G. Bartle).

[2] Ziemer, William P. *Weakly differentiable functions. Sobolev spaces and functions of bounded variation.* Graduate Texts in Mathematics, 120. Springer-Verlag, New York, 1989. xvi+308 pp. ISBN: 0-387-97017-7.

[3] Giusti, Enrico. *Minimal surfaces and functions of bounded variation.* Monographs in Mathematics, 80. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984. xii+240 pp. ISBN: 0-8176-3153-4 (Reviewer: Helmut Kaul).

[4] Jones, Frank(1-RICE). *Lebesgue integration on Euclidean space.* Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1993. xvi+588 pp. ISBN: 0-86720-203-3.

[5] Ambrosio, Luigi(I-SNS); Fusco, Nicola(I-FRNZ); Pallara, Diego(I-LECCE). *Functions of bounded variation and free discontinuity problems.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000. xviii+434 pp. ISBN: 0-19-850245-1.

[6] De Giorgi, E.; Colombini, F.; Piccinini, L. C. *Frontiere orientate di misura minima e questioni collegate.* (Italian) Scuola Normale Superiore, Pisa, 1972. 177 pp.

[7] Oleĭnik, O. A. *Discontinuous solutions of non-linear differential equations.* Amer. Math. Soc. Transl. (2) 26 1963 95–172.

[8] Bogachev, V. I. *Measure theory.* Vol. I, II. Springer-Verlag, Berlin, 2007. Vol. I: xviii+500 pp., Vol. II: xiv+575 pp. ISBN: 978-3-540-34513-8; 3-540-34513-2 (Reviewer: René L. Schilling).