

2.1 Riippumattomat indikaattorit. Olkoot $\theta_1, \dots, \theta_n$ riippumattomia Bernoulli-jakautuneita satunnaismuuttujia parametrilla $p \in (0, 1)$. Laske seuraaville satunnaismuuttujien jakauma ja odotusarvo:

- (a) $X = \theta_1 + \dots + \theta_n$,
- (b) $Y = \theta_1 \dots \theta_n$.

2.2 T_n -avaruuden rakentaminen. Olkoot p_1, \dots, p_n numeroituvan tila-avaruuden $S \subset \mathbb{R}$ todennäköisyysfunktioita. Määritellään $\Omega = S^n$, kuvaus P kaavalla

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p_1(\omega_1)p_2(\omega_2) \dots p_n(\omega_n), \quad A \subset \Omega,$$

ja kuvaukset X_1, \dots, X_n kaavoilla

$$X_i(\omega) = \omega_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

- (a) Näytä, että P on todennäköisyysmitta.
 - (b) Näytä, että satunnaismuuttujan X_i pistetodennäköisyysfunktio on p_i .
 - (c) Näytä, että satunnaismuuttujat X_1, \dots, X_n ovat riippumattomat.
- 2.3 Apina kirjailijana.** Apina istuu tietokoneen ääressä ja lyö umpimähkään 50-merkkistä näppäimistöä (josta caps lock poistettu).

- (a) Oletetaan, että apina tuottaa vuoden aikana tekstin, jossa on sata miljoonaa merkkiä. Kuinka monta kertaa sana ”kivi” keskimäärin esiintyy tekstissä?
- (b) Seitsemän veljestä -teoksessa on 635 864 merkkiä. Kuinka pitkä teksti apinan tulee kirjoittaa, jotta kyseisen teoksen sanatarkka toisinto (isot kirjaimet unohtaen) esiintyy tekstissä keskimäärin vähintään yhden kerran?

2.4 Riippumattomien satunnaismuuttujien kuvaukset. Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia numeroituvassa tila-avaruudessa $S \subset \mathbb{R}$ ja olkoot $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mielivaltaisia funktioita.

- (a) Todista kaavat

$$P(f(X) = a) = \sum_{s \in S: f(s)=a} P(X = s),$$
$$P(g(Y) = b) = \sum_{s \in S: g(s)=b} P(Y = s).$$

- (b) Todista, että

$$X \text{ ja } Y \text{ riippumattomat} \implies f(X) \text{ ja } g(Y) \text{ riippumattomat.}$$

Jatkuu seuraavalla sivulla...

2.5 *Kytkeyt parit ER-satunnaisverkossa.* Tarkatellaan Erdős–Rényin satunnaisverkkoa $G(n, p)$, missä on solmut $\{1, \dots, n\}$ ja kukin solmupari kytketään todennäköisyydellä p , muista kytkennöistä riippumatta. Mallinnetaan kyseistä verkkoa riippumattomalla kokoelmalla indikaattorisatunnaismuuttujia $\{\theta_{i,j} : 1 \leq i < j \leq n\}$, missä $\theta_{i,j} = 1$ jos pari (i, j) on kytketty ja $\theta_{i,j} = 0$ muuten.

- (a) Laske odotusarvo verkkojen kytkettyjen parien lukumäärälle N .
- (b) Miten kyseinen odotusarvo käyttäytyy suurella n , kun kytkemistodennäköisyys p on n :n funktio: $p(n) = \lambda/n$, jollain $\lambda > 0$?
- (c) Mikä on N :n jakauma?