

7.1 Olkoot $X, Y : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}$ satunnaismuuttujia, jotka toisistaan riippumatta saavat arvon i todennäköisyydellä $1/2^i$. Laske seuraavat todennäköisyydet:

- (a) $P(\min(X, Y) \leq i)$,
- (b) $P(X = Y)$,
- (c) $P(Y > X)$,
- (d) $P(Y \text{ on } X\text{:llä jaollinen})$.

7.2 Keksi esimerkki riippuvista yksinkertaisista satunnaismuuttujista X ja Y , joille pätee $E\{XY\} = E\{X\}E\{Y\}$.

7.3 Neliöintegroituviin satunnaismuuttujien X ja Y kovarianssi $\text{Cov}(X, Y)$ määritellään kaavalla $\text{Cov}(X, Y) = E\{(X - \mu)(Y - \nu)\}$, missä $E\{X\} = \mu$ ja $E\{Y\} = \nu$.

- (a) Todista, että $\text{Cov}(X, Y) = E\{XY\} - \mu\nu$.
- (b) Todista, että riippumattomille neliöintegroituville satunnaismuuttujille pätee $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

7.4 Olkoon $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ riippumaton kokoelma satunnaismuuttujia, joille pätee $P(X_n = -1) = P(X_n = +1) = 1/2$ kaikilla n . Määritellään $Z_n = X_0 X_1 \cdots X_n$.

- (a) Ovatko Z_0 ja Z_1 riippumattomat?
- (b) Onko kokoelma $\{Z_0, Z_1, Z_2\}$ riippumaton?
- (c) Onko kokoelma $\{Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \dots\}$ riippumaton?

7.5 Olkoot X_1 ja X_2 riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat tasajakautusta välillä $[0, 1]$. Olkoon $Z_1 = \max(X_1, X_2)$ ja $Z_2 = \min(X_1, X_2)$. Ovatko Z_1 ja Z_2 riippumattomia?