Stokastiset prosessit

Lasse Leskelä*

14. lokakuuta 2015

Tämä luentomoniste sisältää materiaalia Aalto-yliopistossa syksyllä 2015 järjestetylle kurssille *MS-C2111 Stokastiset prosessit*. Korjausehdotuksia luentomonisteeseen ovat toimittaneet Akseli Mäkinen, Hoa Ngo ja Jarno Ruokokoski; heille kiitos tekstin selkeyttämisestä. Luentomonistetta saatetaan päivittää tulevaisuudessa, joten korjaukset ja muut parannusehdotukset ovat lämpimästi tervetulleita.

*Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu, Otakaari 1, Espoo. http://math.aalto.fi/~lleskela/

Sisältö

1 Satunnaisluvut ja satunnaisvektorit

Tässä luvussa esitellään pikakertauksena todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskursseilta tutut stokastiikan peruskäsitteet, joita tarvitaan stokastisten prosessien käsittelyssä. Tämä luku kannattaa hypätä yli tai selata nopeasti, jos kokee hallitsevansa nämä asiat entuudestaan.

1.1 Todennäköisyysjakauma

Todennäköisyysjakauma eli *todennäköisyysmitta* on kuvaus $A \mapsto \mathbb{P}(A)$, joka liittää kuhunkin perusjoukon Ω tapahtumaan $A \subset \Omega$ luvun $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$, ja jolle pätee

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

ja

$$\mathbb{P}(\cup_i A_i) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$$

kullekin äärelliselle tai numeroituvasti äärettömälle kokoelmalle erillisiä tapahtumia. *Todennäköisyysavaruus* on pari $(\Omega, \mathbb{P})$, missä Ω on jokin *perusjoukko* ja $\mathbb{P}$ on sopivalla perusjoukon osajoukkojen eli *tapahtumien* kokoelmalla määritelty todennäköisyysjakauma.

Yksinkertaisissa tilanteissa perusjoukko vastaa tietyn satunnaisilmiön mahdollisten realisaatioiden joukkoa. Stokastisten prosessien yhteydessä perusjoukko on usein jokin funktioavaruus tai vielä laajempi joukko, jota on täydennetty tiettyjen analyyttisten tai algebrallisten tarpeiden mukaisesti. Useimpien sovellusten kannalta perusjoukon hienorakenteella ei ole merkitystä, joten yleensä perusjoukko mielletään abstraktina pohjarakenteena, jonka päälle tarvittavat tapahtumat ja jakaumat voidaan määritellä.

Todennäköisyysjakauman ydinajatus on, että havaittavien suureiden tilastolliset tunnusluvut lasketaan jakauman suhteen painotettuina integraaleina. Ylinumeroituvan perusjoukon tapauksessa joudutaan tapahtuman käsitettä tämän vuoksi rajaamaan, sillä toimivaa integraalin käsitettä on mahdotonta määritellä mielivaltaisen patologisten osajoukkojen yli määritellyille jakaumille. Integrointikelpoinen jakauman käsite saadaan määriteltyä ns. mitallisille perusjoukon osajoukoille, jotka muodostavat suljetun rakenteen komplementin sekä numeroituvien yhdisteiden ja leikkausten suhteen. Kaikki tässä monisteessa esiintyvät tapahtumat ja osajoukot ovat tässä mielessä mitallisia, joten asiaa ei sen koommin tässä monisteessa käsitellä. Integrointiin liittyviä teknisiä yksityiskohtia käsitellään tarkemmin stokastiikan ja analyysin jatkokursseilla tai esim. kirjoissa [JP04, Wil91].

1.2 Satunnaismuuttuja

Satunnaismuuttuja on kuvaus $X : \Omega \to S$ todennäköisyysavaruuden $(\Omega, \mathbb{P})$ perusjoukosta tilajoukkoon S. Tila $X(\omega)$ on satunnaismuuttujan *realisaatio* perusjoukon pisteessä ω. Tilajoukon rakenteesta riippuen satunnaismuuttujia voidaan kutsua kuvaavammilla termeillä (taulukko 1).

Tilajoukko	**Satunnaismuuttuja**
$S \subset \mathbb{R}$	Satunnaisluku
$S \subset \mathbb{R}^n$	Satunnaisvektori
$S \subset \mathbb{R}^{m \times n}$	Satunnaismatriisi
$S \subset \{f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}^n\}$	Satunnaisjono, stokastinen prosessi
$S \subset \{f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n\}$	Satunnaisprosessi, stokastinen prosessi
$S \subset \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\}$	Satunnaiskenttä
$S \subset \{f : \{1, \ldots, n\}^2 \to \{0, 1\}\}$	Satunnaisverkko
$S \subset \{\mathbb{R}^n$:n numeroituvat osajoukot$\}$	Satunnainen pistekuvio

Taulukko 1: Satunnaismuuttujista käytettyjä nimityksiä.

Satunnaismuuttujan X *jakauma* on kuvaus $\mu_X : B \mapsto \mathbb{P}(X \in B)$, joka kertoo todennäköisyydet tapahtumille

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}, \quad B \subset S.$$

Joukko-opin määritelmiä huolellisesti tarkastelemalla voidaan varmistaa, että μ_X on tilajoukon S todennäköisyysjakauma.

Stokastisten mallien yhteydessä on lähes aina tarpeen tarkastella useita samalla todennäköisyysavaruudella määriteltyjä satunnaismuuttujia $X_i : \Omega \to S$. Tällöin jakauma μ_{X_i} kuvaa tarkasti satunnaismuuttujan X_i yksittäisen satunnaisvaihtelun mutta ei kerro mitään eri satunnaismuuttujien keskinäisistä riippuvuuksista. Monen satunnaismuuttujan yhteisvaihtelun mallintamista ja analysoimista varten tarvitaan perusjoukon todennäköisyysjakauma. Todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathbb{P})$ on siis universaali pohjarakenne, jonka todennäköisyysjakauma kuvaa kaikkien tarkasteltavasta mallista havaittavien suureiden yhteisjakaumat. Perusjoukon todennäköisyysjakaumasta $\mathbb{P}$ voidaan johtaa kaikkien satunnaismuuttujien erillisjakaumat μ_{X_i} mutta sama ei päde kääntäen.

1.3 Diskreetti jakauma

Joukko on *numeroituva*, jos se on äärellinen tai numeroituvasti ääretön, jolloin sen alkiot voidaan numeroida positiivisia kokonaislukuja käyttäen. Numeroituvalla joukolla määritelty funktio $\mu : S \to \mathbb{R}$ on *pistemassafunktio*[1] , jos pätee

$$\mu(x) \geq 0 \quad \text{ja} \quad \sum_{x \in S} \mu(x) = 1.$$

[1] Pistemassafunktiosta (engl. probability mass function) käytetään myös nimityksiä todennäköisyysfunktio ja pistetodennäköisyysfunktio.

Jokainen numeroituvan joukon pistemassafunktio määrittää todennäköisyysjakauman kaavalla

$$\mu(B) = \sum_{x \in B} \mu(x), \quad B \subset S,$$

missä mukavuussyistä käytetään samaa symbolia sekä jakaumalle $\mu : B \mapsto \mu(B)$ että pistemassafunktiolle $x \mapsto \mu(x)$. Tällainen symbolin ylikuormittaminen on luontevaa, sillä numeroituvan joukon todennäköisyysjakaumien ja pistemassafunktioiden välillä vallitsee yksi–yhteen vastaavuus ylläolevan kaavan mukaisesti. Numeroituvan joukon todennäköisyysjakaumasta käytetään nimitystä *diskreetti jakauma*.

Satunnaismuuttuja $X : \Omega \to S$ on *diskreetti*, jos jollekin numeroituvalle joukolle $S_0 \subset S$ pätee $\mathbb{P}(X \in S_0) = 1$. Diskreetin satunnaismuuttujan jakauma voidaan esittää pistemassafunktion $\mu_X : x \mapsto \mathbb{P}(X = x)$ avulla muodossa

$$\mathbb{P}(X \in B) = \sum_{x \in B \cap S_0} \mu_X(x), \quad B \subset S. \tag{1.1}$$

Lisäksi diskreetille satunnaismuuttujalle voidaan funktion $h : S \to \mathbb{R}$ avulla määritellyn satunnaisluvun $h(X)$ odotusarvo laskea kaavalla

$$\mathbb{E}h(X) = \sum_{x \in S_0} h(x)\, \mu_X(x) \tag{1.2}$$

aina kun $h \geq 0$ tai $\sum_{x \in S_0} |h(x)| \mu_X(x) < \infty$.

Tärkeitä diskreettejä jakaumia on listattu taulukkoon 2. Taulukkoon merkitty tilajoukko on niiden tilojen joukko, jossa jakauman pistemassafunktio poikkeaa nollasta. Jokainen taulukon jakaumista voidaan luonnollisella tavalla tulkita jakaumaksi myös suuremmassa tilajoukossa. Esimerkiksi Bernoulli-jakauma $\mathrm{Ber}(p)$ voidaan tulkita lukujoukon $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ jakaumaksi määrittelemällä pistemassafunktio kaavalla

$$\mu(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x}, & x \in \{0, 1\}, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

1.4 Jatkuva jakauma

Ylinumeroituvan joukon $S \subset \mathbb{R}^n$ *tiheysfunktio* on kuvaus $f : S \to \mathbb{R}$, jolle pätee

$$f(x) \geq 0 \quad \text{ja} \quad \int_S f(x)\, dx = 1.$$

Tiheysfunktio määrittää joukkoon S todennäköisyysjakauman kaavalla

$$\mu(B) = \int_B f(x)\, dx, \quad B \subset S,$$

Jakauma	**Lyhenne**	**Tilajoukko**	**Pistemassafunktio**
Dirac-jakauma	δ_a	$\{a\}$	1
Diskreetti tasajakauma	$\mathrm{Tas}(A)$	$A = \{a_1, \dots, a_n\}$	$\frac{1}{n}$
Bernoulli-jakauma	$\mathrm{Ber}(p)$	$\{0, 1\}$	$p^x(1-p)^{1-x}$
Binomijajakauma	$\mathrm{Bin}(n, p)$	$\{0, 1, \dots, n\}$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
Poisson-jakauma	$\mathrm{Poi}(\lambda)$	$\{0, 1, 2, \dots\}$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$

Taulukko 2: Tärkeitä diskreettejä jakaumia.

mutta kaikilla ylinumeroituvan joukon jakaumilla ei ole tiheysfunktiota. Toisin kuin numeroituvan joukon pistemassafunktioilla ja jakaumilla, ylinumeroituvan joukon tiheysfunktioiden ja jakaumien välillä ei ole yksi–yhteen vastaavuutta. Niitä jakaumia, joilla on tiheysfunktio, kutsutaan *jatkuviksi.*

Ylinumeroituvan tilajoukon $S \subset \mathbb{R}^n$ satunnaisvektori X on *jatkuva*, jos sen jakauma on jatkuva. Tällöin X:n jakauma voidaan esittää tiheysfunktion f_X avulla muodossa

$$\mathbb{P}(X \in B) \;=\; \int_B f_X(x)\,dx, \quad B \subset S, \tag{1.3}$$

ja funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avulla määritellyn satunnaisluvun $h(X)$ odotusarvo lasketaan kaavalla

$$\mathbb{E}h(X) \;=\; \int_S h(x)\, f_X(x) dx \tag{1.4}$$

aina kun $h \geq 0$ tai $\int_S |h(x)|\, f_X(x)dx < \infty$.

Tärkeitä jatkuvia jakaumia on listattu taulukkoon 3. Taulukkoon merkitty tilajoukko on sellainen, johon kaikki jakauman massa on keskittynyt. Jokainen taulukon jakaumista voidaan luonnollisella tavalla tulkita jakaumaksi myös suuremmassa tilajoukossa. Esimerkiksi yksikkövälin tasajakauma voidaan tulkita koko reaaliakselin jakaumana määrittelemällä

$$B \mapsto \int_{B \cap (0,1)} 1\, dx, \quad B \subset \mathbb{R}.$$

1.5 Satunnaisluvut

Satunnaismuuttujaa, jonka tilajoukko on reaaliakseli $\mathbb{R}$ tai sen osajoukko, kutsutaan *satunnaisluvuksi.* Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathbb{P})$ määritellyn satunnaisluvun X *kertymäfunktio* on kuvaus

$$F_X(x) \;=\; \mathbb{P}(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Satunnaisluku X on diskreetti, jos jollain numeroituvalla joukolla $S_0 \subset \mathbb{R}$ pätee $\mathbb{P}(X \in S_0) = 1$. Tällöin X:n jakauma ja odotusarvot voidaan laskea

Jakauma	Lyhenne	Tilajoukko	Tiheysfunktio
Yksikkövälin tasajakauma	$\mathrm{Tas}(0,1)$	$(0,1)$	1
Yleinen jva tasajakauma	$\mathrm{Tas}(A)$	$A \subset \mathbb{R}^n$	$(\int_A dx)^{-1}$
Eksponenttijakauma	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$(0,\infty)$	$\lambda e^{-\lambda x}$
Normaalijakauma	$\mathrm{Nor}(m,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Taulukko 3: Tärkeitä jatkuvia jakaumia.

pistemassafunktion $\mu_X : x \mapsto \mathbb{P}(X = x)$ avulla kaavoilla (1.1)–(1.2) ja kertymäfunktio saadaan kaavasta

$$F_X(x) \;=\; \sum_{w \in S_0 : w \le x} \mu_X(x).$$

Diskreetillä satunnaisluvulla ei milloinkaan ole olemassa tiheysfunktiota.

Satunnaisluku X on jatkuva, jos sen jakauma voidaan ilmaista tiheysfunktion f_X avulla muodossa (1.3). Tällöin sen odotusarvot saadaan laskettua tiheysfunktio avulla kaavalla (1.4) ja kertymäfunktio saadaan kaavasta

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(w)\, dw.$$

Vastaavasti tiheysfunktio saadaan kertymäfunktiosta derivaattana

$$f_X(x) = F'_X(x).$$

Jatkuvan pistemassafunktio ei kerro satunnaisluvusta mitään, sillä kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\mathbb{P}(X = x) \;=\; \int_x^x f_X(w)\, dw \;=\; 0.$$

1.6 Satunnaisvektorit ja yhteisjakaumat

Satunnaisvektori $X = (X_1, \dots, X_n)$ on kuvaus todennäköisyysavaruuden $(\Omega, \mathbb{P})$ perusjoukosta tulojoukkoon $S^n = S \times \cdots \times S$. Satunnaisvektorin komponentit ovat S-arvoisia satunnaismuuttujia. Satunnaismuuttujien $X_1, \dots, X_n$ *yhteisjakauma* eli satunnaisvektorin X jakauma on kuvaus

$$\mu_X(B) \;=\; \mathbb{P}(X \in B), \quad B \subset S^n,$$

joka kertoo millä todennäköisyydellä satunnaisvektori kuuluu joukkoon B. Yhteisjakauma on siis tulojoukon S^n todennäköisyysjakauma. Yhteisjakauman ensimmäinen *reunajakauma* määritellään kaavalla

$$B \mapsto \mu_X(B \times S \times S \times \cdots S), \quad B \subset S,$$

toinen reunajakauma kaavalla

$$B \mapsto \mu_X(S \times B \times S \times \cdots S), \quad B \subset S, \quad \text{jne.}$$

Yhteisjakauman i:s reunajakauma on siis satunnaismuuttujan X_i jakauma. Yhteisjakaumasta μ_X voidaan määrittää jokaisen komponentin X_i jakauma μ_{X_i}. Käänteinen ei pidä paikkaansa, sillä yhteisjakauma sisältää informaatiota komponenttien tilastollisesta riippuvuusrakenteesta, joka ei käy ilmi reunajakaumista.

Diskreetin satunnaisvektorin jakauma määräytyy numeroituvan tulojoukon S^n pistemassafunktiosta

$$\mu_X(x) \ = \ \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in S^n.$$

Diskreetin satunnaisvektorin komponentit ovat diskreettejä satunnaismuuttujia. Diskreetin satunnaisvektorin $X = (X_1, X_2, X_3)$ ensimmäisen komponentin X_1 pistemassafunktio saadaan yhteisjakauman pistemassafunktiosta kaavalla

$$\mu_{X_1}(x_1) \ = \ \sum_{y_2 \in S} \sum_{y_3 \in S} \mu_X(x_1, y_2, y_3), \quad x_1 \in S_1.$$

Vastaavasti saadaan komponenttien X_2 ja X_3 pistemassafunktiot ja sama kaava toimii merkintöjä vaihtamalla myös kaksi- ja useampiulotteiseen tapaukseen.

Jatkuvan satunnaisvektorin jakauma määräytyy ylinumeroituvan joukon $\mathbb{R}^n$ tiheysfunktiosta

$$f_X(x) \ = \ f_X(x_1, \ldots, x_n), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Jatkuvan satunnaisvektorin komponentit ovat jatkuvia satunnaislukuja. Jatkuvan satunnaisvektorin $X = (X_1, X_2, X_3)$ ensimmäisen komponentin X_1 tiheysfunktio saadaan yhteisjakauman tiheysfunktiosta kaavalla

$$f_{X_1}(x_1) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, y_2, y_3)\, dy_2 dy_3, \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Vastaavasti saadaan komponenttien X_2 ja X_3 tiheysfunktiot ja sama kaava toimii merkintöjä vaihtamalla myös kaksi- ja useampiulotteiseen tapaukseen.

1.7 Stokastinen riippuvuus ja riippumattomuus

Stokastisia riippuvuusrakenteita oppii hahmottamaan tarkastelemalla ensiksi, mitä tarkoittaa riippumattomuus. Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathbb{P})$ määritellyt S-arvoiset satunnaismuuttujat X_i, $i \in I$, ovat *riippumattomat*, jos kaikille äärellisille indeksijoukoille $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$ ja kaikille tilajoukon S osajoukoille $B_1, \ldots, B_n$ pätee

$$\mathbb{P}(X_{i_1} \in B_1, \ldots, X_{i_n} \in B_n) \ = \ \mathbb{P}(X_{i_1} \in B_1) \cdots \mathbb{P}(X_{i_n} \in B_n).$$

Allaolevan todennäköisyysavaruuden tapahtumat A_i ovat riippumattomat, jos niiden indikaattorit $1(A_i)$ ovat riippumattomat.

Todennäköisyysteorian tekniikoilla voidaan perustella seuraavat tulokset:

(i) Diskreetin satunnaisvektorin $X = (X_1, \dots, X_n)$ komponentit ovat riippumattomat jos ja vain jos yhteisjakauman pistemassafunktiolle pätee

$$\mu_X(x_1, \dots, x_n) \; = \; \mu_{X_1}(x_1) \cdots \mu_{X_n}(x_n)$$

kaikilla $x_1, \dots, x_n \in S$.

(ii) Jatkuvan satunnaisvektorin $X = (X_1, \dots, X_n)$ komponentit ovat riippumattomat jos ja vain jos X:llä on tiheysfunktio, joka voidaan esittää muodossa

$$f_X(x_1, \dots, x_n) \; = \; f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n).$$

(iii) Stokastinen riippumattomuus säilyy deterministisissä muunnoksissa: jos satunnaismuuttujat X_i, $i \in I$, ovat riippumattomat, niin tällöin myös satunnaismuuttujat $h_i(X_i)$, $i \in I$ ovat riippumattomat mielivaltaisilla deterministisillä funktioilla h_i.

1.8 Ehdollinen todennäköisyys

Tapahtuman A *ehdollinen todennäköisyys* tapahtuman C suhteen määritellään kaavalla

$$\mathbb{P}(A \,|\, C) = \frac{\mathbb{P}(A, C)}{\mathbb{P}(C)}, \quad \text{kun } \mathbb{P}(C) \neq 0.$$

Tällöin kuvaus $A \mapsto \mathbb{P}(A \,|\, C)$ on perusjoukon todennäköisyysjakauma. Vastaavasti satunnaismuuttujan X *ehdollinen jakauma* tapahtuman C suhteen määritellään kuvauksena

$$B \mapsto \mathbb{P}(X \in B \,|\, C), \quad B \subset S.$$

Diskreetin satunnaisvektorin (X_1, X_2) ensimmäisen komponentin X_1 ehdollinen jakauma tapahtuman $\{X_2 = x_2\}$ suhteen on diskreetti jakauma, jonka pistemassafunktio on

$$x_1 \mapsto \frac{\mu_X(x_1, x_2)}{\mu_{X_2}(x_2)}.$$

Jatkuvalle satunnaisvektorille (X_1, X_2) ei voida määritellä ehdollista jakaumaa samalla tapaa, koska tapahtuman $\{X_2 = x_2\}$ todennäköisyys on nolla. Niissä pisteissä x_2, joissa $f_{X_2}(x_2) > 0$, voidaan kuitenkin määritellä ehdollinen tiheysfunktio kaavalla

$$x_1 \mapsto \frac{f_X(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

ja useat laskut voidaan suorittaa mieltämällä yllämääritelty funktio oikeaksi ehdolliseksi todennäköisyydeksi. Esim. merkitsemällä ylläolevaa funktiota $f_X(x_1 \,|\, x_2)$, voidaan funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ avulla määritellyn satunnaisluvun $h(X_1, X_2)$ odotusarvo laskea kaavalla

$$\mathbb{E}h(X_1, X_2) \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, x_2) \, f_X(x_1 | x_2) dx_1 \right) f_{X_2}(x_2) dx_2.$$

1.9 Odotusarvo, varianssi ja keskihajonta

Positiivisen satunnaisluvun $X \geq 0$ *odotusarvo* $\mathbb{E}(X)$ lasketaan kaavalla (1.2), kun X on diskreetti, ja kaavalla (1.4), kun X on jatkuva. Yleisellä satunnaisluvulla $X \in \mathbb{R}$ on odotusarvo, jos $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, ja tällöin odotusarvo $\mathbb{E}(X)$ lasketaan edellämainituilla kaavoilla. Vakion a eli Dirac-jakaumaa δ_a noudattavan satunnaisluvun odotusarvo on $\mathbb{E}(a) = a$, ja yleisesti pätee

$$\mathbb{E}(aX + bY) \;=\; a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) \quad \text{kaikilla} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

huolimatta siitä, ovatko X ja Y riippuvia vai riippumattomia. Lisäksi riippumattomille satunnaisluvuille X ja Y pätee

$$\mathbb{E}(XY) \;=\; \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).$$

Satunnaisluvun, jonka odotusarvo on $m_X = \mathbb{E}X$, *varianssi* määritellään kaavalla

$$\mathrm{Var}(X) \;=\; \mathbb{E}((X - m_X)^2)$$

ja se voidaan laskea sijoittamalla $h(x) = (x - m)^2$ kaavoihin (1.2)–(1.4) Lisäksi X:n *keskihajontaa* merkitään $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$. Varianssi ja keskihajonta mittaavat, miten paljon X:n realisaatiot tyypillisesti poikkeavat odotusarvosta. Tämä käy ilmi Chebyshevin epäyhtälöstä, jonka mukaan

$$\mathbb{P}(|X - m_X| > a) \;\leq\; \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2} \quad \text{kaikilla } a > 0.$$

Varianssille pätee laskukaava

$$\mathrm{Var}(a + bX) \;=\; b^2\,\mathrm{Var}(X) \quad \text{kaikilla } a, b \in \mathbb{R},$$

ja erityisesti vakion a eli Dirac-jakaumaa δ_a noudattavan satunnaisluvun varianssi on nolla. Lisäksi riippumattomille satunnaisluvuille X ja Y pätee

$$\mathrm{Var}(X + Y) \;=\; \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

1.10 Kovarianssi ja korrelaatio

Olkoot X ja Y diskreettejä tai jatkuvia satunnaislukuja, joilla on nollasta poikkeava äärellinen varianssi. Tällöin X:n ja Y:n *kovarianssi* määritellään kaavalla

$$\mathrm{Cov}(X, Y) \;=\; \mathbb{E}((X - m_X)(Y - m_Y)),$$

missä $m_X = \mathbb{E}X$ ja $m_Y = \mathbb{E}_Y$. Diskreetin tai jatkuvan satunnaisvektorin (X_1, X_2) komponenttien kovarianssi voidaan laskea X_1:n ja X_2:n yhteisjakaumasta sijoittamalla $h(x) = (x_1 - m_X)(x_2 - m_Y)$ kaavaan (1.2) tai (1.4). Satunnaislukujen X ja Y *korrelaatio* määritellään normalisoimalla kovarianssi kaavalla

$$\mathrm{Cor}(X, Y) \;=\; \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}}.$$

Kovarianssille pätee yleisesti kaavat

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X,Y) &= \operatorname{Cov}(Y,X), \\
\operatorname{Cov}(aX+bY,Z) &= a\operatorname{Cov}(X,Z) + b\operatorname{Cov}(Y,Z), \\
\operatorname{Cov}(X,X) &= \operatorname{Var}(X).
\end{aligned}
$$

Lisäksi $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$ ja $\operatorname{Cor}(X,Y) = 0$, kun X ja Y ovat riippumattomat, mutta sama ei päde kääntäen.

1.11 Satunnaislukujen generointi

Simulointiin pohjautuvissa numeerisissa kokeissa tarvitaan usein tiettyä todennäköisyysjakaumaa μ noudattavia tilastollisesti riippumattomia satunnaislukuja $X_1, X_2, \ldots$ Jos saatavilla on satunnaislukugeneraattori, joka tuottaa riippumattomia välin $(0,1)$ tasajakaumaa noudattavia satunnaislukuja $U_1, U_2, \ldots,$ voidaan tarvittava satunnaisjono generoida muodossa

$$
X_i = Q(U_i), \quad i = 1,2,\ldots, \tag{1.5}
$$

missä Q on kohdejakauman kvantiilifunktio. Funktio $Q : (0,1) \to \mathbb{R}$ on jakauman μ *kvantiilifunktio*, jos

$$
F(Q(u)-) \leq u \leq F(Q(u)) \quad \text{kaikilla } u \in (0,1),
$$

missä $F(x) = \mu((-\infty, x])$ on jakauman μ kertymäfunktio ja $F(x-)$ on lyhennysmerkintä kertymäfunktion vasemmanpuoliselle raja-arvolle pisteessä x. Jos kertymäfunktio on kääntyvä, on $Q = F^{-1}$ jakauman yksikäsitteinen kvantiilifunktio. Muussa tapauksessa kvantiilifunktioksi voidaan esimerkiksi valita oikealta jatkuva funktio

$$
Q(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > u\}.
$$

Tarkistetaan vielä, että kaava (1.5) todella tuottaa halutunlaisia satunnaislukuja. Oletetaan, että kertymäfunktio on aidosti kasvava, jolloin kvantiilifunktio on $Q = F^{-1}$ ja havaitaan, että

$$
\mathbb{P}(X_i \leq x) = \mathbb{P}(F^{-1}(U_i) \leq x) = \mathbb{P}(U_i \leq F(x)).
$$

Koska välin $(0,1)$ tasajakautuneelle satunnaisluvulle pätee $\mathbb{P}(U_i \leq z) = z$ kaikilla $z \in [0,1]$, nähdään ylläolevasta kaavasta että $\mathbb{P}(X_i \leq x) = F(x)$. Näin ollen satunnaisluvun X_i kertymäfunktio on F niin kuin pitääkin. Satunnaisluvut $X_1, X_2, \ldots$ ovat stokastisesti riippumattomia, koska riippumattomuus säilyy deterministisissä muunnoksissa. Yleisessä tapauksessa, kun kertymäfunktio ei ole kääntyvä, voidaan vastaava perustelu tehdä huolellisemmalla analyysillä [FS04, Lemma A.19].

Riippumattomia tasajakautuneita satunnaislukuja tuottavaa satunnaislukugeneraattoria ei ole välttämättä helppo rakentaa. Sen pohtiminen, onko tämä ylipäänsä mahdollista, jätetään filosofien tehtäväksi. Todennäköisyysteorian menetelmin voidaan kuitenkin todistaa, että ääretön jono riippumattomia tasajakautuneita satunnaislukuja on mahdollista generoida yhden tasajakautuneen satunnaisluvun pohjalta [Kal02, lemma 3.21]. Tietokonesimuloinneissa käytetään yleensä deterministisiä algoritmeja, jotka tuottavat *pseudosatunnaisia* eli tilastollisesti satunnaisen kaltaisia lukujonoja. R:llä esim. komento

```
runif(100)
```

tuottaa sata pseudosatunnaislukua väliltä $(0, 1)$. Satunnaisen kaltaisia lukujonoja voi myös jalostaa sopivista luonnonilmiöistä tehdyistä mittaustuloksista (esim. http://www.random.org).

2 Markov-ketjut ja stokastiset mallit

2.1 Siirtymämatriisi ja siirtymäkaavio

Äärellisen tilajoukon Markov-ketju on satunnaisprosessi, joka siirtyy tilasta x tilaan y todennäköisyydellä $P(x,y)$ aiemmista tiloista riippumatta. Markov-ketjun *tilajoukkoa* merkitään symbolilla S, ja siirtymätodennäköisyyksien kokelmaa $P = \{P(x,y) : x,y \in S\}$ kutsutaan ketjun *siirtymämatriisiksi*. Siirtymämatriisi on siis tilojen $x,y \in S$ indeksoima reaaliarvoinen neliömatriisi. Koska siirtymämatriisin alkiot ovat todennäköisyyksiä, pätee sen alkioille

$$P(x,y) \geq 0, \quad x,y \in S,$$

ja koska ketju varmuudella aina siirtyy johonkin tilaan, pätee siirtymämatriisin riveille

$$\sum_{y \in S} P(x,y) = 1, \quad x \in S.$$

Täsmällisemmin ilmaistuna todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathbb{P})$ määritelty S-arvoinen satunnaisjono $(X_0, X_1, X_2, \dots)$ on *Markov-ketju*, jos mielivaltaiselle muotoa $H_{t-} = \{X_0 = x_0, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}\}$ olevalle tapahtumalle pätee

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = y \,|\, H_{t-}, X_t = x) \;=\; \mathbb{P}(X_{t+1} = y \,|\, X_t = x) \;=\; P(x,y) \tag{2.1}$$

aina kun $\mathbb{P}(H_{t-}, X_t = x\}) > 0$. Näin ollen Markov-ketjun seuraava tila riippuu ketjun nykyhetkeen asti tehdyistä havainnoista ainoastaan nykytilan välityksellä, eli ketjun aiemmilla tiloilla ei ole tilastollista merkitystä tulevaisuutta ennustettaessa. Yhtälöä (2.1) kutsutaan satunnaisprosessin *Markov-ominaisuudeksi* Pietarissa vaikuttaneen venäläismatemaatikon Andrei Markovin (1856–1922) mukaan. Markov-ominaisuus voidaan määritellä samaan tapaan myös jatkuvan aikavälin ja äärettömän tilajoukon stokastisille prosesseille. Yleisten Markov-prosessien luokkaan kuuluu paljon tärkeitä stokastisia prosesseja, esim. Poisson-prosessi ja Brownin liike. Näistä lisää myöhemmin.

Markov-ketjun rakennetta voidaan havainnollistaa merkitsemällä $x \to y$, kun $P(x,y) > 0$. Siirtymämatriisin P ja sitä vastaavan Markov-ketjun *siirtymäkaavio* on suunnattu verkko, jonka solmuina ovat ketjun tilat ja linkkeinä suunnatut solmuparit $x \to y$. Siirtymäkaavio voidaan tulkita painotettuna suunnattuna verkkona asettamalla linkin $x \to y$ painoksi kyseistä siirtymää vastaava todennäköisyys $P(x,y)$.

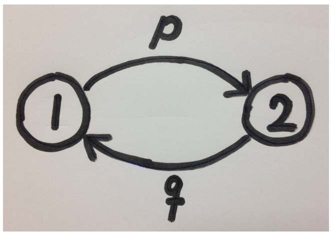
2.2 Stokastisia malleja

Tutustutaan seuraavaksi kolmeen esimerkkiin Markov-ketjulla mallinnettavista satunnaisilmiöistä.

Esimerkki 2.1 (Säämalli)**.** Mallinnetaan kesäpäivän $t = 0,1,2,\dots$ vallitsevaa säätilaa satunnaisprosessina tilajoukossa $S = \{1,2\}$, missä tila $1 =$ 'pilvistä' ja 2 = 'aurinkoista'. Oletetetaan, että pilvistä päivää seuraa aurinkoinen päivä todennäköisyydellä $p = 0.2$ ja aurinkoista päivää pilvinen todennäköisyydellä $q = 0.5$. Tällöin voidaan säämallin tila esittää Markov-ketjuna $(X_0, X_1, \dots)$, jonka siirtymämatriisi on

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

ja siirtymäkaavio on esitetty kuvassa 1.



Kuva 1: Säämallin siirtymäkaavio

Oletetaan, että maanantaina (päivä $t = 0$) on pilvistä. Tällöin säämallin ennusteen mukaan tiistaina on pilvistä todennäköisyydellä $1 - p$ ja aurinkoista todennäköisyydellä p, eli

$$\mathbb{P}(X_1 = 1 \,|\, X_0 = 1) \;=\; 1 - p \quad \text{ja} \quad \mathbb{P}(X_1 = 2 \,|\, X_0 = 1) \;=\; p.$$

Todennäköisyys, että keskiviikkona on pilvistä, saadaan ehdollistamalla tiistain säätilojen perusteella

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2 = 1 \,|\, X_0 = 1) &= (1-p)\mathbb{P}(X_2 = 1 \,|\, X_1 = 1) + p\mathbb{P}(X_2 = 1 \,|\, X_1 = 2) \\ &= (1-p)^2 + pq. \end{aligned}$$

Näin ollen siis keskiviikkona on ennusteen mukaan pilvistä todennäköisyydellä $(1-p)^2 + pq = 0.740$.

Seuraava hieman monimutkaisempi esimerkki on suomenkielinen versio esimerkistä [Kul11, Ex. 2.4].

Esimerkki 2.2 (Varastonhallinta)**.** Katiskakauppa.com Oyj myy kannettavia tietokoneita myymälässä, joka on avoinna ma–la klo 10–18. Myymälän varastoa hallinnoidaan seuraavasti. Joka lauantai klo 18 myyjä laskee, montako tietokonetta vielä on varastossa. Jos tämä lukumäärä on alle kaksi, hän tilaa niin monta uutta tietokonetta, että seuraavana maanantaiaamuna varastosta löytyy viisi tietokonetta. Viikon aikana myymälään saapuvien tietokoneen ostajien lukumäärän arvioidaan noudattavan Poisson-jakaumaa odotusarvolla 3. Mikäli ostohetkellä ei varastossa ole yhtään tietokonetta, kyseinen asiakas ostaa tietokoneen muualta. Mallinna varaston tilaa satunnaisprosessina.

Olkoon X_t kannettavien tietokoneiden lukumäärä varastossa ma klo 10 viikolla $t = 0, 1, \ldots$ ja olkoon D_t tietokoneiden kokonaiskysyntä kyseisen viikon aikana. Tällöin viikon t päättyessä la klo 18 varastosta löytyy $\max(X_t - D_t, 0)$ tietokonetta. Jos $X_t - D_t \geq 2$, niin viikon päättyessä varastosta löytyy vähintään kaksi tietokonetta, eikä uusia tietokoneita tilata, joten $X_{t+1} = X_t - D_t$. Jos taas $X_t - D_t \leq 1$, niin uusia tietokoneita tilataan niin monta, että viikon $t+1$ alussa varastosta löytyy $X_{t+1} = 5$ tietokonetta. Yhdistämällä nämä tapaukset voidaan kirjoittaa

$$X_{t+1} = \begin{cases} X_t - D_t, & \text{jos } X_t - D_t \geq 2, \\ 5, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Tästä nähdään, että satunnaisprosessin $(X_0, X_1, \ldots)$ tilajoukko on $S = \{2, 3, 4, 5\}$.

Oletetaan seuraavaksi, että tietokoneiden kunkin viikon kysyntä on riippumattomaton muiden viikkojen kysynnöistä ja varaston tilasta aiemmilla viikoilla. Tällöin voidaan todistaa, että prosessi $(X_0, X_1, \ldots)$ on Markov-ketju. Lasketaan seuraavaksi ketjun siirtymien todennäköisyydet. Tarkastellaan ensiksi todennäköisyyttä siirtyä jostain tilasta i tilaan $j \in \{2, 3, 4\}$. Tälläinen siirtymä voi tapahtua ainoastaan silloin, kun viikonloppuna ei tehdä uutta tilausta, jolloin $X_{t+1} = X_t - D_t$. Näin ollen[2]

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t+1} = j \mid X_t = i, X_{t-1}, \ \ldots, X_0) &= \mathbb{P}(X_t - D_t = j \mid X_t = i, X_{t-1}, \ \ldots, X_0) \\ &= \mathbb{P}(i - D_t = j \mid X_t = i, X_{t-1}, \ \ldots, X_0) \\ &= \mathbb{P}(D_t = i - j) \end{aligned}$$

kaikilla $j \in \{2, 3, 4\}$ ja $i \in \{2, 3, 4, 5\}$. Koska D_t oletettiin Poi(3)-jakautuneeksi, pätee

$$\mathbb{P}(D_t = k) = \begin{cases} e^{-3} \frac{3^k}{(k)!}, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Näistä kaavoista voidaan laskea siirtymämatriisin alkiot sarakkeisiin $j = 2, 3, 4$. Viimeisen sarakkeen laskemiseksi tulee vielä selvittää, millä todennäköisyydellä ketju voi siirtyä jostain tilasta i tilaan $j = 5$. Jos $i \in \{2, 3, 4\}$, tällainen siirtymä tapahtuu täsmälleen silloin kun viikonloppuna varastoa täydennetään uusia tietokoneita tilaamalla, eli silloin kun $X_t - D_t \leq 1$. Näin ollen

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t+1} = 5 \mid X_t = i, X_{t-1}, \ \ldots, X_0) &= \mathbb{P}(X_t - D_t \leq 1 \mid X_t = i, X_{t-1}, \ \ldots, X_0) \\ &= \mathbb{P}(i - D_t \leq 1 \mid X_t = i, X_{t-1}, \ \ldots, X_0) \\ &= \mathbb{P}(D_t \geq i - 1) \end{aligned}$$

kaikilla $i \in \{2, 3, 4\}$. Lopuksi tulee vielä selvittää siirtymätodennäköisyys siirtymällä tilasta $i = 5$ tilaan $j = 5$. Tällainen siirtymä tapahtuu täsmälleen silloin

[2] Allaolevassa kaavassa jätetään merkitsemättä tilojen arvot $X_{t-1} = i_{t-1}, \ldots, X_0 = i_0$ tilan säästämiseksi.

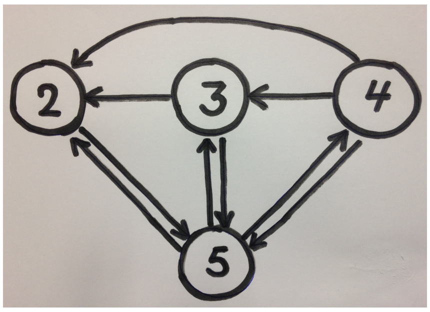
kun $D_t = 0$ tai $D_t \geq 4$. Näin ollen

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{t+1} = 5 \,|\, X_t = 5, X_{t-1}, \ \ldots, X_0) &= \mathbb{P}(D_t \in \{0, 4, 5, 6, \ldots\} \,|\, X_t = i, X_{t-1}, \ \ldots, X_0) \\ &= \mathbb{P}(D_t = 0) + \mathbb{P}(D_t \geq 4).\end{aligned}$$

Laskemalla D_t:n pistetodennäköisyyksien numeeriset arvot Poisson-jakaumasta (2.2), voidaan varaston tilaa kuvaavan Markov-ketjun siirtymämatriisi kirjoittaa muodossa

$$P = \begin{bmatrix} 0.0498 & 0 & 0 & 0.9502 \\ 0.1494 & 0.0498 & 0 & 0.8008 \\ 0.2240 & 0.1494 & 0.0498 & 0.5768 \\ 0.2240 & 0.2240 & 0.1494 & 0.4026 \end{bmatrix}.$$

Huomaa, että P:n rivit ja sarakkeet on indeksoitu joukolla $S = \{2, 3, 4, 5\}$. Vastaava siirtymämatriisi on esitetty kuvassa 2.



Kuva 2: Varastonhallintamallin siirtymäkaavio.

Monissa tekniikan ja luonnotieteiden sovelluksissa tarvittavat Markov-ketjut voivat olla tilajoukoltaan valtavan suuria. Seuraavan esimerkin tilajoukko sisältää miljardeja alkioita ja kasvaa alati.

Esimerkki 2.3 (Www-sivujen pisteytys)**.** Internetin hakukone löytää tyypillisesti tuhansia annettua hakusanaa vastaavia www-sivuja. Haun tekijä haluaa nähdä hakutuloksista tärkeimmät ensimmäisenä. Miten voidaan www-sivut pisteyttää tärkeysjärjestykseen? Googlen perustajat kehittivät tähän tarkoitukseen PageRank-algoritmin [BP98], joka toimii seuraavasti.

Tarkastellaan suunnattua verkkoa, jonka solmuina ovat kaikki maailman www-sivut ja linkkeinä sivujen väliset hyperlinkit. Merkitään verkon solmujoukkoa symbolilla S ja naapuruusmatriisia symbolilla G, jolloin

$$G(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \to y, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Määritellään tilajoukkoon S siirtymämatriisi kaavalla

$$P(x,y) \;=\; c\frac{1}{n} \;+\; (1-c)\,\frac{G(x,y)}{\sum_{y'\in S} G(x,y')},$$

Solmun x *PageRank* $\pi(x)$ on todennäköisyys, että siirtymämatriisin P mukaan etenevä Markov-ketju löydetään pitkän ajan ($t \to \infty$) kuluttua solmusta x. Tällaisen määritelmän järkevyys ei ole lainkaan itsestään selvää. Jatkossa opimme tunnistamaan, milloin tämäntyyppinen rajatodennäköisyys on hyvin määritelty, ja opimme laskemaan kyseisen todennäköisyyden.

PageRank-algoritmissa käytetty Markov-ketju voidaan tulkita selailijana, joka etenee verkkosivuilla umpimähkään hyperlinkkejä klikkailemalla. Välillä selailija pitkästyy ja käynnistää selailunsa alusta täysin umpimähkään valitulta verkkosivulta. Parametri c voidaan tulkita todennäköisyytenä, että selailija pitkästyy tietyllä ajanhetkellä. Ylläesitetty siirtymämatriisin määritelmä on kelvollinen verkoille, joissa jokaisen solmun lähtöaste $\sum_{y'} G(x,y') > 0$, eli jokaisesta solmusta lähtee vähintään yksi linkki johonkin toiseen solmuun. Koska tämä ei pidä paikkaansa www-verkolle, algoritmin määritelmää pitää muokata esim. poistamalla ensin verkosta kaikki lähtöasteen nolla solmut.

2.3 Hetkittäiset tilajakaumat

Markov-ketjun *tilajakauma* μ_t ajanhetkellä $t = 0, 1, \dots$ määritellään kaavalla

$$\mu_t(x) \;=\; \mathbb{P}(X_t = x), \quad x \in S.$$

Tilajakauma μ_t kertoo siis satunnaismuuttujan X_t todennäköisyysjakauman. Alkuhetken $t = 0$ tilajakaumaa μ_0 kutsutaan Markov-ketjun *alkujakaumaksi.*

Todennäköisyys, että ketju on tilassa y ajanhetkellä $t+1$ saadaan ajanhetken t suhteen ehdollistamalla laskettua kaavasta

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = y) \;=\; \sum_{x\in S} \mathbb{P}(X_t = x)\mathbb{P}(X_{t+1} = y \mid X_t = x).$$

Tilajakauman määritelmää ja Markov-ominaisuutta (2.1) käyttämällä voidaan ylläoleva yhtälö kirjoittaa muodossa

$$\mu_{t+1}(y) \;=\; \sum_{x\in S} \mu_t(x)P(x,y).$$

Kun tilajakaumat μ_t ja μ_{t+1} tulkitaan tilajoukon S indeksoimina vaakavektoreina, voidaan ylläoleva yhtälö kirjoittaa lyhyesti muodossa

$$\mu_{t+1} \;= \mu_t P. \tag{2.3}$$

Tästä havainnosta voidaan päätellä seuraava tärkeä tulos.

Lause 2.4. *Markov-ketjun tilajakauma mielivaltaisella ajanhetkellä* $t = 0, 1, 2, \ldots$ *saadaan laskettua alkujakaumasta kaavalla*

$$\mu_t = \mu_0 P^t, \tag{2.4}$$

missä P^t *on siirtymämatriisin* t*:s potenssi.*

Todistus. Lauseen väite on selvästikin totta ajanhetkelle $t = 0$, sillä P^0 on määritelmän mukaan identiteettimatriisi. Mikäli lauseen väite pitää paikkansa jollain ajanhetkellä $t \geq 0$, niin yhtälön (2.3) ja matriisikertolaskun liittännäisyyden mukaan

$$\mu_{t+1} = \mu_t P = (\mu_0 P^t)P = \mu_0(P^t P) = \mu_0 P^{t+1},$$

ja tällöin väite pitää paikkansa myös ajanhetkellä $t + 1$. Induktioperiaatteen mukaan väite siis pätee kaikilla $t \geq 0$. □

Esimerkki 2.5 (Säämalli)**.** Ennustetaan syyskuun säätilaa Otaniemessä käyttäen esimerkin 2.1 Markov-ketjua. Oletetaan, että tarkasteltavan viikon maanantaina ($t = 0$) on pilvistä. Millä todennäköisyydellä Otaniemessä on keskiviikkona pilvistä? Entä lauantaina?

Determinististä alkutilaa $X_0 = 1$ vastaava alkujakauma on pisteen 1 Dirac-jakauma, eli vektorimuodossa $\mu_0 = [1, 0]$. Yhtälön (2.4) mukaan keskiviikon tilajakauma saadaan laskettua kaavasta $\mu_2 = \mu_0 P^2$, joten

$$[\mu_2(1),\ \mu_2(2)] \;=\; [1,\ 0] \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^2 \;=\; [0.740,\ 0.260].$$

Näin ollen keskiviikkona on pilvistä todennäköisyydellä 0.740, mikä on sama mitä saatiin käsin laskemalla esimerkissä 2.1. Vastaavasti lauantain tilajakauma saadaan laskettua kaavasta $\mu_5 = \mu_0 P^5$, eli

$$[\mu_5(1),\ \mu_5(2)] \;=\; [1,\ 0] \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^5 \;=\; [0.715,\ 0.285].$$

Jälkimmäisen matriisitulon voi laskea R:llä muodossa

```
library(expm)
P = matrix(c(0.8,0.2,0.5,0.5), nrow=2, byrow=TRUE)
mu0 = c(1,0)
mu5 = mu0%*%(P%^%5)
```

2.4 Monen askeleen siirtymätodennäköisyydet

Markov-ketjun siirtymämatriisin alkio $P(x, y)$ kertoo todennäköisyyden siirtyä yhdellä askeleella tilasta x tilaan y. Seuraava tulos kertoo, että vastaavasti $P^t(x, y)$ on todennäköisyys siirtyä t:llä askeleella tilasta x tilaan y.

Lause 2.6. *Todennäköisyys, että Markov-ketju siirtyy t:n aika-askeleen aikana tilasta x tilaan y saadaan siirtymämatriisin avulla kaavasta*

$$\mathbb{P}(X_t = y \,|\, X_0 = x) \;=\; P^t(x,y), \tag{2.5}$$

missä $P^t(x,y)$ siirtymämatriisin t:nnen potenssin rivin x sarakkeen y alkio.

Todistus. Väite pätee ajanhetkellä $t = 0$, sillä identiteettimatriisille P^0 pätee $P^0(x,y) = \delta_x(y)$.

Oletetaan seuraavaksi, että väite pätee jollekin ajanhetkelle $t \geq 0$. Tällöin ehdollistamalla X_t:n mahdollisten tilojen suhteen ja sen jälkeen hyödyntämällä Markov-ominaisuutta (2.1) havaitaan, että

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{t+1} = y \,|\, X_0 = x) &= \sum_{x'} \mathbb{P}(X_t = x' \,|\, X_0 = x)\mathbb{P}(X_{t+1} = y \,|\, X_t = x', X_0 = x) \\
&= \sum_{x'} P^t(x,x')\,\mathbb{P}(X_{t+1} = y \,|\, X_t = x', X_0 = x) \\
&= \sum_{x'} P^t(x,x')P(x',y) \\
&= P^{t+1}(x,y).
\end{aligned}$$

Väite pätee siis myös ajanhetkelle $t+1$ ja induktioperiaatteen mukaan näin myös mielivaltaiselle ajanhetkelle t. □

Esimerkki 2.7 (Säämalli)**.** Onnisen pariskunta on varannut 1900 EUR maksavan kahden päivän minilomapaketin skotlantilaiselle paratiisisaarelle. Matkanjärjestäjä tarjoaa pariskunnalle 300 EUR hintaista matkavakuutusta, jonka voimassa ollessa koko lomapaketin hinta maksetaan takaisin, mikäli molempina matkapäivinä on pilvistä. Matkakohteessa on tänään aurinkoista ja ensimmäinen matkapäivä on 14 vuorokauden kuluttua nykyhetkestä. Kannattaako Onnisten ostaa heille tarjottu matkavakuutus, kun oletetaan, että matkakohteen sää noudattaa esimerkin 2.1 Markov-ketjua?

Lasketaan säämallin avulla todennäköisyys $\mathbb{P}(X_{14} = 1, X_{15} = 1)$, että molempina matkapäivinä on pilvistä. Ehdollistamalla ajanhetken 14 suhteen ja hyödyntämällä tietoa $X_0 = 2$ havaitaan kaavasta (2.5), että

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{14} = 1, X_{15} = 1) &= \mathbb{P}(X_{14} = 1)\,\mathbb{P}(X_{15} = 1 \,|\, X_{14} = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_{14} = 1 \,|\, X_0 = 2)\,\mathbb{P}(X_{15} = 1 \,|\, X_{14} = 1) \\
&= P^{14}(2,1)P(1,1) \\
&= 0.571.
\end{aligned}$$

Matkavakuutuksen kanssa lomamatkan odotusarvoinen nettokustannus on näin ollen $300 + (1 - 0.571) \times 1900 = 1151$ EUR, joten matkavakuutus on selvästi kannattava sijoitus tässä tapauksessa. Todennäköisyyden $\mathbb{P}(X_{14} = 1)$ voi laskea vaihtoehtoisesti kaavalla (2.4) asettamalla alkujakaumaksi $\mu_0 = [0, 1]$.

2.5 Tilojen esiintyvyys

Tilojen esiintyvyyden analysoimiseksi otetaan käyttöön seuraava kätevä merkintä. Tapahtuman A *indikaattori* $1(A)$ on binääriarvoinen satunnaismuuttuja, jolle pätee[3]

$$1(A) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{jos tapahtuma } A \text{ sattuu,} \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Suoraan odotusarvon määritelmästä voidaan päätellä, että tapahtuman indikaattorin odotusarvo on kyseisen tapahtuman todennäköisyys, eli $\mathbb{E}1(A) = \mathbb{P}(A)$.

Tilan y *esiintyvyys* eli frekvenssi aikavälillä[4] $[0, t]$ määritellään kaavalla

$$N_t(y) \;=\; \sum_{s=0}^{t} 1(X_s = y), \tag{2.6}$$

joten $N_y(t)$ on satunnainen kokonaisluku, joka kertoo kuinka monta kertaa tila y esiintyy Markov-ketjun realisoimassa polussa ajanhetkeen t asti. Tilan y odotusarvoinen esiintyvyys tilasta x käynnistyttäessä määritellään kaavalla

$$M_t(x, y) \;=\; \mathbb{E}(N_y(t) \,|\, X_0 = x)$$

ja matriisia $M_t = (M_t(x, y) : x, y \in S)$ kutsutaan Markov-ketjun *esiintyvyysmatriisiksi* ajanhetkellä t.

Lause 2.8. *Markov-ketjun esiintyvyysmatriisi ajanhetkellä $t = 0, 1, \ldots$ saadaan laskettua siirtymämatriisista P kaavalla*

$$M_t \;=\; \sum_{s=0}^{t} P^s. \tag{2.7}$$

Todistus. Esiintyvyyden lausekkeesta (2.6) havaitaan odotusarvon lineaarisuutta ja indikaattorin kaavaa $\mathbb{E}1(A) = \mathbb{P}(A)$ käyttämällä, että

$$\mathbb{E}_x N_y(t) \;=\; \mathbb{E}_x \sum_{s=0}^{t} 1(X_s = y) \;=\; \sum_{s=0}^{t} \mathbb{E}_x 1(X_s = y) \;=\; \sum_{s=0}^{t} \mathbb{P}_x(X_s = y).$$

Koska kaavan (2.5) mukaan $\mathbb{P}_x(X_s = y) = P^s(x, y)$, tästä seuraa, että

$$M_t(x, y) \;=\; \mathbb{E}_x N_y(t) \;=\; \sum_{s=0}^{t} P^s(x, y),$$

mikä on matriisiyhtälön (2.7) esitys alkio alkiolta. □

[3]Täsmällisemmin ilmaistuna $1(A)$ on funktio allaolevan todennäköisyysavaruuden perusjoukosta joukkoon $\{0, 1\}$, joka kuvaa alkion ω arvoksi 1 täsmälleen silloin, kun $\omega \in A$.

[4]Tässä monisteessa $[0, t]$ tarkoittaa kokonaislukujen joukkoa $\{0, 1, \ldots, t\}$ puhuttaessa diskreettiaikaisista malleista ja reaalilukujen joukkoa $\{s \in \mathbb{R} : 0 \le s \le t\}$ puhuttaessa jatkuvan ajan malleista.

Esimerkki 2.9 (Säämalli)**.** Oletetaan, että tänään on aurinkoista. Ennusta esimerkin 2.1 mallia käyttämällä pilvisten päivien odotettu lukumäärä tästä päivästä alkavan viikon aikana.

Kysytty luku on esiintyvyysmatriisin M_6 alkio $M_6(2,1)$ (vakuuta itsesi miksi oikea tulos saadaan matriisista M_6 eikä M_7). Esiintyvyysmatriisi M_6 saadaan yhtälön (2.7) avulla laskettua kaavasta (huomaa että P^0 on identiteettimatriisi)

$$M_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^2 + \cdots + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^6 = \begin{bmatrix} 5.408 & 1.592 \\ 3.980 & 3.020 \end{bmatrix}.$$

Näin ollen pilvisten päivien odotettu lukumäärä on ennusteen mukaan 3.980. Ylläolevan matriisipotenssien summan voi laskea R:llä muodossa

```
library(expm)
P = matrix(c(0.8,0.2,0.5,0.5), nrow=2, byrow=TRUE)
M = matrix(0,2,2)
for (s in 0:6) {
  M <- M + P%^%s
}
```

2.6 Markov-ketjun polkujen simulointi

Annettua siirtymämatriisia vastaava Markov-ketju voidaan simuloida seuraavasti. Ensiksi tarvitsee löytää jossain tilajoukossa Λ määritelty satunnaismuuttuja U ja sellainen deterministinen funktio $f : S \times \Lambda \to S$, jolle pätee

$$\mathbb{P}(f(x,U) = y) = P(x,y) \quad \text{kaikilla } x, y \in S. \tag{2.8}$$

Yhtälön (2.8) toteuttavaa paria (f, U) kutsutaan siirtymämatriisin P *stokastiseksi esitykseksi*. Tällöin alkutilasta $X_0 = x_0$ käynnistyvä Markov-ketju voidaan simuloida rekursiivisesti kaavalla

$$X_{t+1} = f(X_t, U_{t+1}), \qquad t = 0, 1, \dots,$$

missä $U_1, U_2, \dots$ ovat alkutilasta X_0 ja toisistaan riippumattomia U:n kanssa samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Sen tosiasian varmistaminen, että näin määritelty satunnaisjono $(X_0, X_1, \dots)$ todellakin on siirtymämatriisia P noudattava Markov-ketju, jätetään aktiivisen lukijan itsenäiseksi harjoitustehtäväksi.

Esimerkki 2.10 (Renkaan satunnaiskulku)**.** Tarkastellaan rengasverkkoa, jossa on n solmua ja vierekkäiset solmut on yhdistetty. Numeroidaan verkon solmut myötäpäivään luvuin $\{1, 2, \dots, n\}$. Olkoon X symmetrinen satunnaiskulku, joka siirtyy myötäpäivään ja vastapäivään todennäköisyydellä $1/2$. Tapauksessa $n =$

6 on kyseisen Markov-ketjun siirtymämatriisi

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Tällöin pari (f, U), missä U on tilajoukon $\Lambda = \{-1, +1\}$ tasajakaumaa noudattava satunnaisluku ja $f(x, u) = x + u \mod n$, on siirtymämatriisin P stokastinen esitys. Renkaan satunnaiskulku voidaan siis simuloida käyttäen riippumatonta jonoa $U_1, U_2, \ldots$ kolikonheittoja, missä kolikon $U_t \in \{-1, +1\}$ tulos kertoo, liikutaanko t:nnellä askeleella vastapäivään ($U_t = -1$) vai myötäpäivään ($U_t = +1$).

Seuraava tulos vahvistaa, että stokastinen esitys on aina mahdollista muodostaa jatkuvan välin $(0, 1)$ tasajakauman avulla. Todetaan lisäksi, että yksittäisellä siirtymämatriisilla on monia (rajattomasti) stokastisia esityksiä.

Lause 2.11. *Jokaisella äärellisen tilajoukon siirtymämatriisilla P on olemassa stokastinen esitys (f, U), missä U on välin $(0, 1)$ tasajakaumaa noudattava satunnaisluku.*

Todistus. Numeroimalla tilajoukon alkiot mielivaltaisesti voidaan merkitä $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Merkitään lisäksi siirtymämatriisin osarivisummia luvuin

$$q_{i,j} = \sum_{r=1}^{j} P(x_i, x_r), \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

ja määritellään funktio $f : S \times (0, 1) \to S$ kaavalla

$$f(x_i, u) = x_j, \quad \text{kun} \quad q_{i,j-1} < u \leq q_{i,j}.$$

Kun funktion f toiseksi syötteeksi valitaan välin $(0, 1)$ tasajakautunut satunnaisluku U, huomataan että

$$\mathbb{P}(f(x_i, U) = x_j) = \mathbb{P}(q_{i,j-1} < U \leq q_{i,j}) = q_{i,j} - q_{i,j-1} = P(x_i, x_j).$$

Koska ylläoleva yhtälö on voimassa kaikille tiloille x_i ja x_j, voidaan todeta että (f, U) on määritelmän (2.8) mukainen stokastinen esitys siirtymämatriisille P. $\square$

3 Markov-ketjut pitkällä aikavälilä

3.1 Rajajakauma ja tasapainojakauma

Edellisessä luvussa opimme, että alkujakaumasta μ_0 käynnistyvän Markov-ketjun hetkittäiset tilajakaumat ajanhetkillä $t = 0, 1, 2, \dots$ saadaan laskettua siirtymämatriisin P avulla kaavasta $\mu_t = \mu_0 P^t$, eli

$$\mu_t(y) \;=\; \sum_{x \in S} \mu_0(x) P^t(x, y).$$

Kun ollaan kiinnostuneita pitkästä aikahorisontista, on luonnollista esittää seuraavat kysymykset:

1. Onko ketjun tilajakaumalla olemassa rajajakauma, kun t kasvaa rajatta?
2. Jos rajajakauma on olemassa, riippuuko se alkutilasta?
3. Jos rajajakauma on olemassa, miten sen voi laskea?

Kahteen ensimmäiseen kysymykseen vastaaminen vaatii huolellista analyysiä ja riittäviä rakenteellisia oletuksia. Kolmas kysymys on helpompi, joten käsitellään se ensin.

Todennäköisyysjakauma $\pi = (\pi(x) : x \in S)$ on siirtymämatriisin P ja sitä vastaavan Markov-ketjun *tasapainojakauma*, mikäli se toteuttaa tasapainoyhtälöt

$$\sum_{x \in S} \pi(x) P(x, y) \;=\; \pi(y), \qquad y \in S, \tag{3.1}$$

eli matriisimuodossa

$$\pi P = \pi.$$

Jos Markov-ketju käynnistyy alkujakaumasta π, havaitaan lauseen 2.4 ja matriisitulon liitännäisyyden avulla, että tällöin

$$\mu_t = \pi P^t = (\pi P) P^{t-1} = \pi P^{t-1} \;= \cdots = \pi P = \pi.$$

Satunnaisesta tasapainojakaumaa noudattavasta alkutilasta käynnistyvälle Markov-ketjulle siis tilan X_t jakauma säilyy vakiona kaikilla ajanhetkillä $t = 0, 1, 2, \dots$

Seuraava tulos kertoo, että jos Markov-ketjulla on rajajakauma, voidaan se selvittää ratkaisemalla lineaarinen yhtälöryhmä (3.1).

Lause 3.1. *Jos π on äärellisen tilajoukon Markov-ketjun rajajakauma, on se myös tasapainojakauma.*

Todistus. Matriisitulon liitännäisyyttä käyttämällä nähdään, että

$$\mu_{t+1} \;= \mu_0 P^{t+1} \;= (\mu_0 P^t) P = \mu_t P,$$

joka voidaan kirjoittaa alkioittain muodossa

$$\mu_{t+1}(y) = \sum_{x \in S} \mu_t(x) P(x, y).$$

Kun oletetaan, että kaikilla $x \in S$ pätee $\mu_t(x) \to \pi(x)$, kun $t \to \infty$, nähdään ottamalla raja-arvot ylläolevan yhtälön molemmin puolin, että

$$\pi(y) = \lim_{t \to \infty} \mu_{t+1}(y) = \sum_{x \in S} \lim_{t \to \infty} \mu_t(x) P(x, y) = \sum_{x \in S} \pi(x) P(x, y).$$

Näin ollen tasapainoyhtälö (3.1) pitää paikkansa. Lisäksi, koska μ_t on todennäköisyysjakauma, pätee

$$\sum_{x \in S} \mu_t(x) = 1$$

kaikilla t. Ottamalla raja-arvot ylläolevan yhtälön molemmin puolin t:n lähestyessä ääretöntä, nähdään että $\sum_{x \in S} \pi(x) = 1$, eli π on todennäköisyysjakauma. □

Esimerkki 3.2 (Merkkiuskollisuus)**.** Markkinoilla on kolmen eri valmistajan älypuhelimia. Valmistajan i puhelimen käyttäjä valitsee uudeksi puhelimekseen saman valmistajan mallin todennäköisyydellä β_i. Oletetaan, että merkiuskollisuutta mittaavat parametrit ovat $\beta_1 = 0.8$, $\beta_2 = 0.6$ ja $\beta_3 = 0.4$. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että kaikkien valmistajien puhelimilla on sama elinaika. Stabiloituvatko valmistajien markkinaosuudet pitkällä aikavälillä?

Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että kaikkien valmistajien puhelimilla on sama elinaika ja mallinnetaan tyypillisen kuluttajan puhelinmerkkiä t:nnen ostohetken jälkeen Markov-ketjulla $(X_0, X_1, \ldots,$ jonka siirtymämatriisi on

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan tietokoneella siirtymämatriisin potensseja:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.69 & 0.17 & 0.14 \\ 0.34 & 0.44 & 0.22 \\ 0.42 & 0.33 & 0.25 \end{bmatrix}, \ldots,$$

$$P^{10} = \begin{bmatrix} 0.5471287 & 0.2715017 & 0.1813696 \\ 0.5430034 & 0.2745217 & 01824748 \\ 0.5441087 & 0.2737123 & 0.1821790 \end{bmatrix},$$

$$P^{20} = \begin{bmatrix} 0.5454610 & 0.2727226 & 0.1818165 \\ 0.5454452 & 0.2727341 & 0.1818207 \\ 0.5454494 & 0.2727310 & 0.1818196 \end{bmatrix}.$$

Koska matriisin P^{20} rivit ovat likimain samat, alkuhetkellä valmistajan i asiakas on 20 puhelimenvaihdon jälkeen valmistajan 1 asiakas tn:llä $P^{20}(i,1) \approx 0.545$. Koska matriisin P^{20} rivit ovat likimain samat, on alkutilan $i = 1, 2, 3$ merkitys on vähäpätöinen pitkän ajan kuluttua, joten vaikuttaisi siltä, että markkinaosuudet stabiloituvat kohti rajajakaumaa

$$[0.5454545, 0.2727273, 0.1818182].$$

Toisaalta tasapainoyhtälöt $\pi P = \pi$ ja $\sum_{x=1}^{3} \pi(x) = 1$ siirtymämatriisille P voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} 0.8\pi(1) + 0.2\pi(2) + 0.3\pi(3) &= \pi(1) \\ 0.1\pi(1) + 0.6\pi(2) + 0.3\pi(3) &= \pi(2) \\ 0.1\pi(1) + 0.2\pi(2) + 0.4\pi(3) &= \pi(3) \\ \pi(1) + \pi(2) + \pi(3) &= 1. \end{aligned}$$

Näiden yhtälöiden yksikäsitteinen ratkaisu on

$$\pi = \left[\frac{6}{11}, \frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right] \approx [0.5454545, 0.2727273, 0.1818182],$$

mikä vastaa numeerisesti havaittua rajajakaumaa, kuten lauseen 3.1 mukaan pitääkin.

Esimerkki 3.3 (Ketju, jolla ei ole rajajakaumaa)**.** Tarkastellaan alkutilasta $X_0 = 1$ käynnistyvää tilajoukon $S = \{1, 2, 3\}$ Markov-ketjua, jonka siirtymämatriisi on

$$P = \begin{bmatrix} 0.0 & 1 & 0.0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Laskemalla P:n potensseja nähdään, että

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.0 & 1 & 0.0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad P^3 = \begin{bmatrix} 0.0 & 1 & 0.0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.0 & 1 & 0.0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad P^5 = \begin{bmatrix} 0.0 & 1 & 0.0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

josta havaitaan, että

$$P^t = \begin{cases} P, & t = 1, 3, 5, \dots, \\ P^2 & t = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Deterministisestä alkutilasta $X_0 = 1$ eli Dirac-jakaumasta $\mu_0 = [1, 0, 0]$ käynnistyvän ketjun tilajakaumalle siis pätee

$$\mu_t \;=\; \mu_0 P^t \;=\; \begin{cases} [0, 1, 0] & t = 1, 3, 5, \dots, \\ [0.3, 0, 0.7] & t = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Kyseisellä ketjulla ei siis ole olemassa rajarajakaumaa. Suoralla laskulla kuitenkin nähdään, että $\pi = [0.15, 0.50, 0.35]$ ketjun tasapainojakauma.

Esimerkki 3.4 (Ketju, jolla on monta rajajakaumaa)**.** Tarkastellaan alkutilasta $X_0 = 1$ käynnistyvää tilajoukon $S = \{1, 2, 3\}$ Markov-ketjua, jonka siirtymämatriisi on

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tälle matriisille pätee $P^t = P$ kaikilla $t = 1, 2, \dots$ Deterministisestä alkutilasta $X_0 = 1$ eli Dirac-jakaumasta $\mu_0 = [1, 0, 0]$ käynnistyvän ketjun tilajakaumalle siis pätee

$$\mu_t \;=\; \mu_0 P^t \;=\; [0.5, 0.5, 0].$$

Sama tulos pitää paikkansa myös, jos alkutila on $X_0 = 2$, mutta alkutilasta $X_0 = 3$ käynnistyttäessä

$$\mu_t \;=\; [0, 0, 1]P^t \;=\; [0, 0, 1].$$

Tällä ketjulla on siis useita rajajakaumia alkujakaumasta riippuen. Lineaarisuuden perusteella voidaan tarkistaa, että jokainen muotoa

$$\pi \;=\; \alpha[0.5, 0.5, 0] + (1 - \alpha)[0, 0, 1], \quad 0 \le \alpha \le 1,$$

oleva jakauma on ketjun tasapainojakauma.

3.2 Yhtenäisyys

Merkitään $x \rightsquigarrow y$, jos siirtymäkaaviossa on polku tilasta x tilaan y. Siirtymämatriisi P ja sitä vastaava Markov-ketju on *yhtenäinen* eli pelkistymätön, jos $x \rightsquigarrow y$ kaikilla $x, y \in S$. Verkkoteorian termein ketju on yhtenäinen täsmälleen silloin kun sitä ketjun siirtymäkaavio on vahvasti yhtenäinen suunnattu verkko.

Esimerkki 3.5 (Yhtenäisiä Markov-ketjuja)**.** Seuraavat Markov-ketjut ovat yhtenäisiä:

- Säämalli (esimerkki 2.1)
- Varastonhallintamalli (esimerkki 2.2)
- Esimerkkien 3.2 ja 3.3 ketjut (piirrä näiden siirtymäkaaviot).

Esimerkki 3.6 (Epäyhtenäinen Markov-ketju)**.** Esimerkin 3.4 ketju on epäyhtenäinen, sillä tilasta 3 ei pääse mihinkään muuhun tilaan. Tämän ketjun siirtymäkaavio jakautuu kahteen vahvasti yhtenäiseen komponenttiin $\{1,2\}$ ja $\{3\}$, joiden välillä ei ole linkkejä.

Markov-ketjun tilajoukkoon voidaan määritellä symmetrinen relaatio merkitsemällä $x \leftrightsquigarrow y$, jos $x \rightsquigarrow y$ ja $y \rightsquigarrow x$. Tätä ekvivalenssirelaatiota käyttämällä voidaan tilajoukko osittaa ekvivalenssiluokkiin $C(x) = \{y \in S : y \leftrightsquigarrow x\}$, joita kutsutaan ketjun *yhteysluokiksi*. Yhtenäisellä ketjulla on yksi yhteysluokka, joka sisältää kaikki tilajoukon tilat. Esimerkin 3.6 ketjulla on kaksi yhteysluokkaa $C(1) = C(2) = \{1,2\}$ ja $C(3) = \{3\}$.

Seuraava tulos kertoo, miten yhtenäisyyttä voidaan tarkastella matriisilaskennan keinoin.

Lause 3.7. *Siirtymämatriisi P on yhtenäinen jos ja vain jos kaikille tiloille $x, y \in S$ on olemassa kokonaisluku $t \geq 1$, jolle pätee $P^t(x,y) > 0$.*

Todistus. Oletetaan ensiksi, että P on yhtenäinen ja valitaan tarkasteltavaksi tilat $x \neq y$. Tällöin siirtymäkaaviossa on olemassa polku $x = x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_t = y$, joten

$$P(x_0,x_1)P(x_1,x_2)\cdots P(x_{t-1},x_t) > 0.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
P^t(x,y) &= \mathbb{P}(X_t = y \mid X_0 = x) \\
&= \mathbb{P}(X_t = x_t \mid X_0 = x_0) \\
&\geq \mathbb{P}(X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, \ldots, X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0) \\
&= P(x_0,x_1)P(x_1,x_2)\cdots P(x_{t-1},x_t) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Käänteisen väitteen todistamiseksi oletetaan, että $P^t(x,y) > 0$ jollain kokonaisluvulla $t \geq 1$. Tällöin siis $\mathbb{P}(X_t = y \mid X_0 = x) > 0$, eli tilasta x käynnistyvä Markov-ketju on t:n ajanhetken kuluttua mahdollista löytää tilasta y, jolloin siirtymäkaaviosta täytyy löytyä t:n askeleen pituinen polku, jota pitkin ketju voi edetä tilasta x tilaan y, eli pätee $x \rightsquigarrow y$. □

3.3 Yhtenäisen ketjun tasapainojakauma

Lause 3.8. *Jokaisella äärellisen tilajoukon yhtenäisellä siirtymämatriisilla on olemassa yksikäsitteinen tasapainojakauma.*

Lauseen 3.8 tarkka todistus on selkeästi esitetty kirjassa [LPW08, luku 1.5], ja tässä monisteessa tyydytään vain lyhyesti kuvailemaan, mihin todistus perustuu. Tasapainojakauman olemassaolo voidaan vahvistaa näyttämällä, että

$$\pi(x) \;=\; \frac{1}{\mathbb{E}(\tau_x^+ \mid X_0 = x)} \tag{3.2}$$

on tasapainoyhtälöt (3.1) toteuttava todennäköisyysjakauma, missä

$$\tau_x^+ = \min\{t \geq 1 : X_t = x\}$$

on Markov-ketjun *positiivinen siirtymäaika* tilaan x. Äärellisen tilajoukon yhtenäiselle Markov-ketjulle voidaan todistaa, että ketju varmuudella käy aikanaan kaikissa tilajoukon tiloissa, joten yllämääritelty τ_x^+ on hyvin määritelty äärellinen satunnaisluku.

Kaavan (3.2) voi intuitiivisesti tulkita seuraavasti. Tasapainotodennäköisyys $\pi(x)$ vastaa niiden ajanhetkien suhteellista osuutta, joina Markov-ketju havaitaan tilassa x. Tämä suhteellinen aikaosuus on kääntäen verrannollinen perättäisten tilassa x käyntien väliaikojen odotusarvoon. Käytännössä tasapainojakaumaa ei kuitenkaan ratkaista yhtälöstä (3.2), vaan ratkaisemalla matriisiyhtälö $\pi = \pi P$.

Tasapainojakauman yksikäsitteisyys voidaan perustella todistamalla ensiksi, että yhtenäiselle äärelliselle siirtymämatriisille kaikki yhtälön $Ph = h$ toteuttavat pystyvektorit ovat muotoa $h = [c, c, \ldots, c]^T$, eli matriisin $P - I$ nolla-avaruus on yksiulotteinen. Lineaarialgebran perusteoriaa käyttämällä voidaan tästä päätellä, että myös vaakavektoriyhtälön $\mu(P - I) = 0$ ratkaisuavaruuden ulottuvuus on yksi. Todennäköisyyden normalisointiehdon $\sum_x \mu(x) = 1$ toteuttavia ratkaisuja voidaan tästä yksiulotteisesta avaruudesta löytää enintään yksi. Näin ollen P:llä voi olla enintään yksi tasapainojakauma.

3.4 Jaksollisuus

Siirtymämatriisin P mukaan etenevän Markov-ketjun tilan x *jakso* on suurin yhteinen tekijä niille ajanhetkille, jolloin tilasta x lähtevä ketju voi palata alkutilaansa. Mahdollisten paluuhetkien joukko voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathcal{T}_x \;=\; \{t \geq 1 : P^t(x, x) > 0\},$$

joten tilan jakso on suurin positiivinen kokonaisluku, jolla kaikki lukujoukon $\mathcal{T}_x$ alkiot ovat jaollisia. Sellaisille tiloille, joille mahdollisten paluuhetkien joukko on tyhjä, ei jaksoa ole määritelty.

Tilan jakso on helppo määrittää siirtymäkaaviosta. Jos kaikki siirtymäkaavion tilasta x lähtevät ja tilaan x palaavat syklit ovat jonkun kokonaisluvun d monikertoja, ja jos d on suurin tällainen kokonaisluku, niin tällöin d on tilan x jakso. Siirtymämatriisi P ja sitä vastaava Markov-ketju on *jaksoton*, jos jokaisen tilan jakso on 1.

Esimerkki 3.9 (Jaksottomia Markov-ketjuja)**.** Seuraavat Markov-ketjut ovat jaksottomia (tarkista itse, että näin todella on):

- Säämalli (esimerkki 2.1)
- Varastonhallintamalli (esimerkki 2.2)
- Merkkiuskollisuusmalli (esimerkki 3.2)

PageRank-algoritmin (esimerkki 2.3) ketju on jaksoton aina kun vaimennuskerroin $c > 0$.

Esimerkki 3.10 (Jaksollinen Markov-ketju)**.** Esimerkin 3.3 ketjun kaikkien tilojen jakso on 2.

3.5 Jaksottoman yhtenäisen ketjun tasapainojakauma

Seuraava tärkeä tulos kiteyttää Markov-ketjujen perusteorian. Se selittää, miksi lähes kaikki äärellisen tilajoukon Markov-mallit pitkällä aikavälillä asettuvat tilastolliseen tasapainoon.

Lause 3.11. *Jokaisella äärellisen tilajoukon yhtenäisellä ja jaksottomalla Markov-ketjulla on olemassa yksikäsitteinen rajajakauma π, joka voidaan määrittää siirtymämatriisista P ratkaisemalla tasapainoyhtälöt $\pi P = \pi$ ja $\sum_x \pi(x) = 1$.*

Jos $(X_0, X_1, X_2, \dots)$ on lauseen 3.11 ehdot toteuttava Markov-ketju ja jos X_∞ on jokin tasapainojakaumaa π noudattava satunnaismuuttuja, stokastiikassa on usein tapana ilmaista lauseen tulos muodossa

$$X_t \xrightarrow{d} X_\infty,$$

mikä tarkoittaa, että satunnaisjono $(X_0, X_1, \dots)$ *suppenee jakaumaltaan* kohti satunnaismuuttujaa X_∞. Jakaumasuppenemisen käsite voidaan määritellä yleisen topologisen avaruuden jakaumille; numeroituvan tilajoukon tapauksessa se tarkoittaa sitä, että satunnaismuuttujien X_t jakaumien pistemassafunktiot μ_t suppenevat pisteittäin kohti pistemassafunktiota π. Korostetaan vielä, että satunnaisjonon $(X_0, X_1, \dots)$ realisaatiot eivät yleenä suppene kohti mitään yksittäistä tilaa, vaan päinvastoin jokainen realisoitu jono poukkoilee loputtomiin tilajoukon kaikissa pisteissä. Tilajakaumien raja π kuvaa tilastollista tasapainoa, johon ketjun jakauma asettuu pitkän ajan kuluttua.

Lauseen 3.11 rajajakauman olemassaolo voidaan todistaa lineaarialgebran matriisianalyyttisin menetelmin tai stokastiikan kytkentämenetelmin. Matematiikan opinnoissa pidemälle tähtäävää lukijaa suositellaan tutustumaan kirjaan [LPW08, luvut 4–5], jossa molemmat todistustekniikat on selkeästi ja tarkasti esitetty. Se, että rajajakauma on myös tasapainojakauma, seuraa lauseesta 3.1.

4 Markov-kustannusmallit ja kulkuajat

4.1 Rajoitetun aikavälin kustannuskertymä

Systeemin tilaa mallinnetaan äärellisen tilajoukon Markov-ketjulla $(X_0, X_1, \dots)$, jonka siirtymämatriisi on P. Oletetaan, että mallissa aiheutuu satunnainen tai deterministinen kustannus $C(x)$ aina systeemin käydessä tilassa x ja oletetaan, että kustannuksen odotettu suuruus $c(x)$ riippuu systeemin menneisyydestä ainoastaan nykytilan kautta. Tarkemmin sanottuna mielivaltaiselle muotoa $H_{t-1} = \{X_0 = x_0, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}\}$ olevalle tapahtumalle pätee

$$\mathbb{E}(C(X_t) \mid X_t = x, H_{t-1}) \;=\; c(x) \tag{4.1}$$

aina kun $\mathbb{P}(H_{t-1}, X_t = x\}) > 0$. Vaikka tässä monisteessa puhutaan kustannuksesta, voi $C(x)$ aivan yhtä hyvin viitata voittoon tai mihin tahansa reaaliarvoiseen suureeseen, josta ollaan kiinnostuneita.

Aikavälin $[0, t]$ kustannuskertymä saadaan kaavasta

$$\sum_{s=0}^{t} C(X_s).$$

ja tilasta x käynnistyvän Markov-ketjun *odotettu kustannuskertymä* kaavasta

$$g_t(x) \;=\; \mathbb{E}\left(\sum_{s=0}^{t} C(X_s) \,\middle|\, X_0 = x \right).$$

Seuraava tulos kertoo, miten odotettu kustannuskertymä saadaan laskettua luvussa 2.5 määritellystä esiintyvyysmatriisista M_t. Allaoleva kaava (4.2) voidaan myös kirjoittaa matriisimuodossa

$$g_t = M_t c,$$

kun funktio $c : S \to \mathbb{R}$ tulkitaan tilajoukon S indeksoimana pystyvektorina.

Lause 4.1. *Odotettu kustannuskertymä voidaan laskea esiintyvyysmatriisin avulla muodossa*

$$g_t(x) \;=\; \sum_{y \in S} M_t(x,y) c(y). \tag{4.2}$$

Todistus. Yhtälön (4.1) avulla voidaan tarkistaa, että kaikilla ajanhetkillä s pätee

$$\mathbb{E}\left(C(X_s) \mid X_0 = x\right) \;=\; \mathbb{E}\left(c(X_s) \mid X_0 = x\right) \;=\; \sum_{y \in S} P^s(x,y)\, c(y).$$

Odotusarvon lineaarisuutta, ylläolevaa yhtälöä ja esiintyvyysmatriisin määritelmää (2.7) käyttämällä havaitaan, että

$$\begin{aligned} g_t(x) &= \sum_{s=0}^{t} \mathbb{E}\left(C(X_s) \,\middle|\, X_0 = x \right) \\ &= \sum_{s=0}^{t} \sum_{y \in S} P^s(x,y)\, c(y) \\ &= \sum_{y \in S} \left(\sum_{s=0}^{t} P^s(x,y) \right) c(y) \\ &= \sum_{y \in S} M_t(x,y)\, c(y). \end{aligned}$$

□

Esimerkki 4.2 (Varastonhallinta)**.** Palataan esimerkin 2.2 varastonhallintamalliin. Oletetaan, että myymälään ostetaan tietokoneita hintaan 590 EUR ja ne myydään hintaan 790 EUR. Viikottainen varastointikustannus on 50 EUR jokaista viikon alussa varastossa olevaa tietokonetta kohden. Laske myymälän liiketoiminnan odotettu nettovoitto seuraavien kymmenen viikon ajalta, kun oletetaan että ensimmäisen viikon alussa myymälän varastossa on viisi tietokonetta.

Varaston tila X_t viikon t alussa on tilajoukon $S = \{2, 3, 4, 5\}$ Markov-ketju, jonka alkutila on $X_0 = 5$. Jos t:nnen viikon alussa varastossa on x tietokonetta, ovat varastointikulut $50x$ kyseiseltä viikolta. Kun merkitään D_t:llä t:nnen viikon kysyntää, saadaan kyseisellä viikolla myytyjen tietokoneiden odotetuksi lukumääräksi $\mathbb{E} \min(D_t, x)$. Näin ollen odotettu nettovoitto viikolta t on

$$c(x) \;=\; -50x + (790 - 590)\, \mathbb{E} \min(D_t, x), \qquad x = 2, 3, 4, 5.$$

Laskemalla ylläolevat luvut D_t:n Poisson-jakaumasta, voidaan funktio $c(x)$ pystyvektorina kirjoittaa muodossa

$$c = \begin{bmatrix} 250.2129 \\ 315.5749 \\ 336.1285 \\ 323.0759 \end{bmatrix}$$

Liiketoiminnan odotettu nettovoitto kymmeneltä viikolta saadaan laskemalla $g_9(5)$ eli pystyvektorin $M_9 c$ viimeinen alkio. Laskemalla tietokoneella esiintyvyymatriisi M_9 nähdään, että

$$g_9 = M_9 c = \begin{bmatrix} 3047 \\ 3106 \\ 3122 \\ 3110 \end{bmatrix}.$$

Näin ollen myymälän odotettu liikevoitto kymmeneltä viikolta on 3110 EUR. Huomaa, että odotettu liikevoitto, kun alussa varastossa on 4 tietokonetta, on 12 EUR suurempi. Tämä johtuu kalliista varastointikustannuksista.

4.2 Ergodisuus

Tähän mennessä olemme oppineet, että yhtenäisen ja jaksottoman Markov-ketjun tilajakaumat suppenevat kohti ketjun yksikäsitteistä tasapainojakaumaa π. Seuraava tulos antaa vaihtoehtoisen tulkinnan tasapainojakaumalle, joka kertoo, että pitkältä aikaväliltä laskettu satunnaisjonon $(f(X_0), f(X_1), \dots)$ aikakeskiarvo on lähellä tasapainojakauman vastaavaa matemaattista odotusarvoa. Tällaista ominaisuutta kutsutaan *ergodisuudeksi*. Huomaa, että allaolevassa lauseessa ei tarvitse vaatia ketjun jaksottomuutta, sillä aikakeskiarvojen ottaminen tasoittaa ketjussa mahdollisesti olevat jaksollisuusefektit.

Lause 4.3. *Äärellisen tilajoukon S yhtenäiselle Markov-ketjulle ja mielivaltaiselle funktiolle $f : S \to \mathbb{R}$ pätee*

$$\frac{1}{t+1} \sum_{s=0}^{t} f(X_s) \;\to\; \sum_{x \in S} f(x)\pi(x)$$

todennäköisyydellä yksi, huolimatta ketjun alkutilasta.

Ylläoleva ergodisuuslause yleensä todistetaan kiinnittämällä jokin tila x ja pitämällä kirjaa ketjun käyttäytymisestä perättäisten tilaan x vierailujen välillä. Markov-ominaisuuden perusteella perättäisten syklien polut ovat toisistaan riippumattomat ja lauseen 4.3 tulos voidaan todistaa vahvaa suurten lukujen lakia soveltamalla [LPW08, luku 4.7]. Lauseen seurauksena saadaan seuraava tulos, joka kertoo pitkän aikavälin suhteelliset rajatiheydet luvussa 2.5 määritellyille tilojen esiintyvyyksille. Allaoleva tulos (4.3) vahvistaa, että $\pi(x)$ voidaan tulkita pitkän aikavälin suhteellisena osuutena ajanhetkistä, jotka Markov-ketju viettää tilassa x.

Lause 4.4. *Äärellisen tilajoukon yhtenäisen Markov-ketjun esiintyvyydet toteuttavat*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t(y)}{t+1} \to \pi(y) \tag{4.3}$$

todennäköisyydellä yksi riippumatta alkutilasta, ja esiintyvyysmatriisin M_t alkioille pätee

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_t(x,y)}{t+1} \to \pi(y).$$

Todistus. Tarkastellaan kaavalla (2.6) määriteltyä tilan y esiintyvyyttä $N_t(y)$ alkutilasta x käynnistyvälle ketjulle. Määrittelemällä funktio f kaavalla

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = y, \\ 0, & \text{muuten,} \end{cases}$$

voidaan tilan y esiintyvyys kirjoittaa muodossa

$$N_t(y) = \sum_{s=0}^{t} f(X_s).$$

Käyttämällä ergodisuuslausetta 4.3 päätellään, että

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t(y)}{t+1} = \sum_{x\in S} f(x)\pi(x) = \pi(y)$$

todennäköisyydellä yksi, eli (4.3) pätee, eikä raja-arvo riipu alkutilasta.

Lisäksi havaitaan, että

$$0 \le \frac{N_t(y)}{t+1} \le 1$$

todennäköisyydellä yksi kaikilla t. Rajoitetun todennäköisyydellä yksi suppenevan satunnaisjonon tapauksessa voidaan raja-arvon ja odotusarvon paikkoja vaihtaa[5]. Näin ollen tulosta (4.3) käyttämällä nähdään, että

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_t(x,y)}{t+1} = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{N_t(y)}{t+1}\right) = \mathbb{E}\left(\lim_{t\to\infty} \frac{N_t(y)}{t+1}\right) = \pi(y).$$

□

4.3 Pitkän aikavälin kustannusvauhti

Palataan vielä luvun 4.1 kustannusmalliin, jossa systeemin kustannuskertymä aikaväliltä $[0,t]$ määritellään kaavalla

$$\sum_{s=0}^{t} C(X_s),$$

[5] Yleisesti tämä perustuu ns. Lebesguen alisteisen suppenemisen lauseeseen, joka perustellaan analyysin ja stokastiikan jatkokursseilla.

ja $c(x)$ on satunnaisluvun $C(X_s)$ odotusarvo tapahtuman $\{X_s = x\}$ vallitessa eikä riipu ketjun aiemmasta polusta. Tilasta x käynnistyvän systeemin pitkän aikavälin *odotettu kustannusvauhti* määritellään kaavalla

$$g(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t+1} \left(\mathbb{E} \sum_{s=0}^{t} C(X_s) \right),$$

mikäli raja-arvo on olemassa.

Lause 4.5. *Äärellisen tilajoukon yhtenäiselle ketjulle pitkän aikavälin odotettu kustannusvauhti saadaan laskettua kaavasta*

$$g(x) = \sum_{y\in S} \pi(y)c(y),$$

eikä tulos riipu alkutilasta x.

Todistus. Lauseen 4.1 perusteella odotettu kustannuskertymä ajanhetkeen t mennessä saadaan esiintyvyysmatriisilla kertomalla muodossa

$$g_t(x) = \sum_{y\in S} M_t(x,y)c(y).$$

Jakamalla ylläolevan yhtälön molemmat puolet luvulla $t+1$ ja soveltamalla lausetta 4.4 tästä nähdään, että

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g_t(x)}{t+1} = \sum_{y\in S} \left(\lim_{t\to\infty} \frac{M_t(x,y)}{t+1} \right) c(y) = \sum_{y\in S} \pi(y)c(y).$$

Selvästikään ylläolevan yhtälön oikea puoli ei riipu x:stä. □

Esimerkki 4.6 (Varastonhallinta)**.** Jatketaan esimerkin 4.2 analyysiä. Selvästi varaston tilaa kuvaava Markov-ketju on yhtenäinen ja jaksoton, joten sillä on yksikäsitteinen rajajakauma, joka voidaan ratkaista tasapainoyhtälöistä $\pi P = \pi$ ja $\sum_x \pi(x) = 1$ tietokoneella ja lausetta 4.5 käyttämällä voidaan todeta, että pitkän aikavälin odotettu tuottovauhti on

$$g(x) = \sum_{y\in S} \pi(y)c(y)$$

eikä se riipu alkutilasta x. Sijoittamalla ylläolevaan kaavaan lukuarvot havaitaan, että pitkällä aikavälillä myymälän odotettu tuotto on 310 EUR viikossa, mikä vastaa 3100 EUR odotettua tuottovauhtia per kymmenen viikon jakso. Tämä on melko lähellä esimerkin 4.2 odotettuja kustannuskertymiä ensimmäisen kymmenen viikon ajalta, jotka riippuvat alkutilasta.

4.4 Kulkuajat

Markov-ketjun $(X_0, X_1, \dots)$ *kulkuaika* joukkoon A määritellään kaavalla

$$T_A = \min\{t \geq 0 : X_t \in A\}.$$

Lisäksi merkitään $T_A = \infty$, mikäli ketju ei koskaan käy joukossa A. Kulkuaika on siis satunnaisluku, joka saa arvoja laajennettussa kokonaislukujen joukossa $\{0, 1, 2, \dots, \infty\}$. Tilasta x käynnistyvän Markov-ketjun *odotettua kulkuaikaa* joukkoon A merkitään

$$k_A(x) \;=\; \mathbb{E}(T_A \,|\, X_0 = x).$$

Lause 4.7. *Odotettujen kulkuaikojen kokoelma $(k_A(x) : x \in S)$ on yhtälöryhmän*

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{y \notin A} P(x,y) f(y), \qquad && x \notin A, \\ f(x) &= 0, && x \in A, \end{aligned} \tag{4.4}$$

pienin ei-negatiivinen ratkaisu.

Yhtälöryhmä (4.4) vastaa harmonisen analyysin näkökulmasta nk. Poissonin yhtälöä

$$Df(x) = -1, \quad x \in B, \tag{4.5}$$

reunaehdolla

$$f(x) = 0, \quad x \in \partial B,$$

kun merkitään $D = P - I$, $B = A^c$ ja $\partial B = A$, missä $I : f \mapsto f$ on tilajoukon indeksoima identiteettimatriisi. Kuvausta $D : f \mapsto Pf - f$ kutsutaan Markov-ketjun *virtausmatriiksi*. Pienimmän ei-negatiivisen ratkaisun voi löytää määrittelemällä ensin $f_0(x) = 0$ kaikilla x ja sen jälkeen rekursiivisesti laskemalla

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} 1 + \sum_{y \notin A} P(x,y) f_n(y), & x \notin A, \\ 0, & x \in A. \end{cases}$$

Tällöin voidaan todistaa, että $f_n(x)$ on kasvava jono, jonka raja-arvo $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ on hyvin määritelty laajennetussa reaalilukujen joukossa $[0, \infty]$, ja kokoelma $f = (f(x) : x \in S)$ on yhtälöryhmän (4.4) pienin ei-negatiivinen ratkaisu. Näiden asioiden varmistaminen on hyvä harjoitustehtävä matemaattisesti suuntautuneelle lukijalle. Ohjelmointia harrastavalle lukijalle hyvä harjoitus puolestaan on kirjoittaa rekursiivinen funktio, joka laskee ylläolevat raja-arvot.

Ennen lauseen 4.7 todistamista tarkastellaan seuraavaa käytännön esimerkkiä, johon lausetta voi soveltaa.

Esimerkki 4.8 (Henkilöstösuunnittelu)**.** Kalvonvääntäjät Oyj on liikkeenjohdon konsulttiyhtiö, jonka 100 työntekijää on jaoteltu kolmeen palkkaluokkaan: 1 = ’juniori’, 2 = ’seniori’ ja 3 = ’partneri’. Viikon alussa junioriasemassa oleva työntekijä ylenee senioriksi tn:llä 0.030, poistuu yhtiöstä tn:llä 0.020 ja muuten jatkaa samassa asemassa seuraavan viikon alussa. Vastaavasti seniori ylenee partneriksi tn:llä 0.010, poistuu yhtiöstä tn:llä 0.008 ja muuten jatkaa samassa asemassa. Partneri poistuu yhtiön palveluksesta tn:llä 0.010 ja muuten jatkaa samassa palveluksessa. Yhtiön palveluksesta poistuvan työntekijän tilalle rekrytoidaan uusi työntekijä junioritasolle. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että uusi työntekijä aloittaa välittömästi seuraavan viikon alussa, jolloin työntekijöiden lukumäärä yhtiössä säilyy vakiona. Kuinka kauan yhtiöön juuri palkattu työntekijä odotusarvoisesti pysyy yhtiön palveluksessa? Entä mikä on partneriksi ylennetyn henkilön odotusarvoinen jäljellä oleva työaika yhtiössä?

Oletetaan, että kaikki ylenemiset ja poistumiset tapahtuvat toisistaan ja edellisten viikkojen tiloista riippumattomasti. Tämä oletus yksinkertaistaa analyysiä huomattavasti, eikä pidä pitkällä aikavälillä paikkaansa, sillä se ei ota huomioon esim. partnerin ikääntymistä kohti eläkeikää. Lyhyellä ja keskipitkällä aikavälillä oletus silti saattaa antaa riittävän tarkkoja ennusteita. Yksittäisen työntekijän urakehitys voidaan tällöin mallintaan Markov-ketjulla tilajoukossa $\{0, 1, 2, 3\}$, missä tila 0 tarkoittaa, että henkilö on poistunut yhtiön palveluksessa. Koska meitä ei kiinnosta henkiön työura yhtiöstä poistumisen jälkeen, voidaan tila 0 mallintaa absorboivana, jolloin siirtymämatriisin ensimmäinen rivi on $[1, 0, 0, 0]$. Viikon alussa junioriasemassa (tila 1) oleva työntekijä poistuu viikon kuluessa yhtiön palveluksesta tn:llä $P(1, 0) = 0.020$ ja ylenee senioriksi tn:llä $P(1, 2) = 0.030$. Koska juniori ei voi suoraan yletä partneriksi yhden viikon aikana, pätee $P(1, 3) = 0$. Näin ollen siirtymämatriisin toinen rivi on $[0.020, 0.950, 0.030, 0]$. Analysoimalla muut rivit samaan tapaan nähdään, että urakehitystä kuvaavan Markov-ketjun siirtymämatriisi on

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.020 & 0.950 & 0.030 & 0 \\ 0.008 & 0 & 0.982 & 0.010 \\ 0.010 & 0 & 0 & 0.990 \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Kyseisen ketjun tila 0 on absorboiva ja muut tilat ovat väistyviä. Tämän näkee selvimmin ketjun siirtymäkaaviosta (kannattaa piirtää itse).

Juuri palkatun juniorin työaika yhtiön palveluksessa on tilasta 1 käynnistyvän Markov-ketjun kulkuaika tilaan 0. Sen odotusarvo on tilajoukon $A = \{0\}$ odotettu kulkuaika $k_A(1)$. Yksittäistä odotettua kulkuaikaa ei yleensä voi erikseen laskea, vaan yleensä yhden laskemiseksi pitää laskea kaikki. Kulkuajat toteuttavat lauseen 4.7 mukaan yhtälöt

$$f(x) = 1 + \sum_{y=1}^{3} P(x, y) f(y), \quad x = 1, 2, 3,$$

jotka nyt voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + 0.950\, f(1) + 0.030\, f(2) \\ f(2) &= 1 + 0.982\, f(2) + 0.010\, f(3) \\ f(3) &= 1 + 0.990\, f(3). \end{aligned}$$

Näistä voidaan ensin ratkaista

$$f(3) = \frac{1}{1 - 0.990} = 100,$$

sen jälkeen

$$f(2) = \frac{1 + 0.010\, f(3)}{1 - 0.982} = 111.11,$$

ja lopulta

$$f(1) = \frac{1 + 0.030\, f(2)}{1 - 0.950} = 86.67.$$

Koska ylläoleville yhtälöille yhtälöille löydettiin vain yksi ei-negatiivinen ratkaisu $f = [f(1), f(2), f(3)]$, ovat kyseisen vektorin komponentit lauseen 4.7 mukaan kysytyt odotetut kulkuajat eli $k_A = f$. Näin ollen yhtiöön juuri palkattu työntekijä pysyy yhtiön palveluksessa odotusarvoisesti 86.67 viikkoa eli noin 1.7 vuotta ja partneriksi ylennetyn henkilön odotettu jäljellä oleva työaika yhtiössä on 100 viikkoa eli noin 1.9 vuotta.

Lauseen 4.7 todistus. Tarkistetaan ensin, että luvut $k_A(x)$ toteuttavat yhtälöt (4.4). Tämä tehdään soveltamalla Markov-ketjulle ensiaskelanalyysiä eli ehdollistamalla ketjun ensimmäisen askeleen suhteen. Kun ketjun alkutila $x \in A$, pätee varmuudella $T_A = 0$, joten $k_A(x) = 0$. Oletetaan seuraavaksi, että ketjun alkutila $x \notin A$. Tällöin ehdollistamalla tilan X_1 suhteen nähdään, että

$$k_A(x) = \sum_{y \in S} P(x,y)\, \mathbb{E}(T_A \,|\, X_1 = y, X_0 = x). \tag{4.7}$$

Kun $x \notin A$, pätee

$$T_A = \min\{t \geq 1 : X_t \in A\},$$

josta voidaan Markov-ominaisuutta käyttämällä päätellä, että

$$\mathbb{E}(T_A \,|\, X_1 = y, X_0 = x) \;=\; 1 + \mathbb{E}(T_A \,|\, X_0 = y) \;=\; 1 + k_A(y).$$

Yhdistämällä ylläoleva havainto kaavaan (4.7) päätellään, että

$$\begin{aligned} k_A(x) &= \sum_{y \in S} P(x,y)(1 + k_A(y)) \\ &= \sum_{y \in S} P(x,y) + \sum_{y \in S} P(x,y) k_A(y). \end{aligned}$$

Kaavan (4.4) alempi yhtälö seuraa tästä, kun todetaan että P:n rivisummat ovat ykkösiä ja $k_A(y) = 0$ kaikilla $y \in A$.

Todistetaan seuraavaksi, että $(k_A(x) : x \in S)$ on pienin ei-negatiivinen ratkaisu. Oletetaan, että $(f(x) : x \in S)$ on jokin yhtälöryhmän (4.4) ei-negatiivinen ratkaisu ja näytetään, että

$$f(x) \geq k_A(x) \tag{4.8}$$

kaikilla x. Selvästi (4.8) pätee kaikilla $x \in A$, sillä tällöin $f(x) = k_A(x) = 0$. Oletetaan seuraavaksi, että $x \notin A$. Tällöin

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{y \notin A} P(x,y) f(y) \\ &= 1 + \sum_{y \notin A} P(x,y) \left(1 + \sum_{z \notin A} P(y,z) f(z) \right) \\ &= 1 + \sum_{y \notin A} P(x,y) + \sum_{y \notin A} \sum_{z \notin A} P(x,y) P(y,z) f(z). \end{aligned}$$

Koska[6] $\mathbb{P}_x(T_A \geq 1) = 1$ ja

$$\sum_{y \notin A} P(x,y) = \mathbb{P}_x(T_A \geq 2),$$

voidaan ylläoleva yhtälö kirjoittaa muodossa

$$f(x) = \mathbb{P}_x(T_A \geq 1) + \mathbb{P}_x(T_A \geq 2) + \sum_{y \notin A} \sum_{z \notin A} P(x,y) P(y,z) f(z).$$

Toistamalla samaa argumenttia monta kertaa nähdään, että

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbb{P}_x(T_A \geq 1) + \cdots + \mathbb{P}_x(T_A \geq t) \\ &\quad + \sum_{y_1 \notin A} \cdots \sum_{y_t \notin A} P(x, y_1) P(y_1, y_2) \cdots P(y_{t-1}, y_t) f(y_t). \end{aligned}$$

Koska $f \geq 0$, voidaan tästä päätellä, että

$$f(x) \geq \mathbb{P}_x(T_A \geq 1) + \cdots + \mathbb{P}_x(T_A \geq t)$$

kaikilla kokonaisluvuilla $t \geq 1$, joten viemällä $t \to \infty$ ja käyttämällä alla olevaa lemmaa 4.9, todetaan että

$$f(x) \geq \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(T_A \geq t) = \mathbb{E}_x T_A = k_A(x).$$

□

[6] Merkitään mukavauussyistä $\mathbb{P}_x$:llä ja $\mathbb{E}_x$:llä todennäköisyyksiä ja odotusarvoja ehdolla $X_0 = x$.

Lemma 4.9. *Jokaiselle satunnaisluvulle X, joka saa arvoja laajennetussa positiivisten kokonaislukujen joukossa $\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\} = \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ pätee*

$$\mathbb{E}X = \sum_{x=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq x). \tag{4.9}$$

Todistus. Jos $\mathbb{P}(X = \infty) = 0$, niin vaihtamalla ei-negatiivisten termien summausjärjestystä nähdään, että

$$\sum_{x=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq x) = \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=x}^{\infty} \mathbb{P}(X = y) = \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{x=1}^{y} \mathbb{P}(X = y) = \sum_{y=1}^{\infty} y\mathbb{P}(X = y) = \mathbb{E}X.$$

Jos taas $\mathbb{P}(X = \infty) > 0$, niin

$$\sum_{x=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq x) \geq \sum_{x=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = \infty) = \infty.$$

Koska $\mathbb{E}X = \infty$ aina kun $\mathbb{P}(X = \infty) > 0$, todetaan että väite pitää paikkansa myös tapauksessa $\mathbb{P}(X = \infty) > 0$. □

4.5 Osumatodennäköisyydet

Tarkastellaan äärellisen tilajoukon Markov-ketjua, jolla on siirtymämatriisi P. Valitaan jokin epätyhjä tilojen joukko $A \subset S$. Yhtenäinen ketju varmuudella käy kaikissa tiloissa aikanaan, mutta epäyhtenäinen ei välttämättä. Millä todennäköisyydellä tilasta x käynnistyvä ketju käy joskus tilajoukossa A? Merkitään kysyttyä todennäköisyyttä

$$h_A(x) = \mathbb{P}(X_t \in A \text{ jollain } t \geq 0 \,|\, X_0 = x).$$

Tätä voidaan kutsua joukon A osumistodennäköisyydeksi alkutilasta x.

Lause 4.10. *Osumatodennäköisyyksien vektori $h_A = (h_A(x) : x \in S)$ on yhtälöryhmän*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{y \in S} P(x, y) f(y), \qquad && x \notin A, \\ f(x) &= 1, && x \in A, \end{aligned} \tag{4.10}$$

pienin ei-negatiivinen ratkaisu.

Samaan tapaan kuin odotetuille kulkuajoille yhtälössä (4.5), voidaan yhtälöryhmä (4.10) tulkita harmonisen analyysin näkökulmasta Poissonin yhtälönä

$$Df(x) = 0, \quad x \in B, \tag{4.11}$$

reunaehdolla

$$f(x) = 1, \quad x \in \partial B,$$

kun merkitään $D = P - I$, $B = A^c$ ja $\partial B = A$. Poissonin yhtälöä (4.11), jonka oikea puoli on nolla, kutsutaan yleisesti Laplacen yhtälöksi. Ennen lauseen todistusta katsotaan käytännön esimerkkiä sen soveltamisesta.

Esimerkki 4.11 (Henkilöstösuunnittelu)**.** Tarkastellaan esimerkin 4.8 yhtiötä. Millä todennäköisyydellä yhtiöön palkattu työntekijä päätyy jossain vaiheessa työuraansa yhtiön partneriksi? Kysytty todennäköisyys on tilajoukon $A = \{3\}$ osumatodennäköisyys $h_A(1)$ alkutilasta $X_0 = 1$ lähdettäessä. Yhtälöryhmä (4.10) on nyt muotoa

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{y=0}^{3} P(x,y) f(y), \quad x = 0,1,2, \\ f(3) &= 1, \end{aligned}$$

ja kaavan (4.6) siirtymämatriisille tämä vastaa yhtälöitä

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0), \\ f(1) &= 0.020\, f(0) + 0.950\, f(1) + 0.030\, f(2), \\ f(2) &= 0.008\, f(0) + 0.982\, f(2) + 0.010\, f(3), \\ f(3) &= 1. \end{aligned}$$

Koska tilasta 0 ei koskaan voi päästä tilaan 3, tiedetään että $f(0) = 0$. Tämän perusteella voidaan muut yhtälöt ratkaista ja havaita että $f = [0, 0.333, 0.556, 1]$ on yhtälöryhmän ratkaisu. Ei ole myöskään vaikeaa varmistaa, että edellä mainittu f on yhtälöryhmän pienin ei-negatiivinen ratkaisu. Lauseen 4.10 perusteella tämä ratkaisu tuottaa kysytyt todenäköisyydet, eli $f = h_A$. Näin ollen yhtiöön junioriksi palkattu työntekijä etenee urallaan partneriksi todennäköisyydellä $f(1) = k_A(1) = 0.333$. Huomaa, että vektorin f komponentit eivät summadu ykköseksi, vaikka sen alkiot ovatkin todennäköisyyksiä (selvitä itsellesi miksi).

Lauseen 4.10 todistus. Näytetään ensiksi, että osumatodennäköisyydet toteuttavat yhtälöryhmän (4.10). Merkitään jälleen $\mathbb{P}_x$:llä todennäköisyyksiä tilasta x käynnistyvälle Markov-ketjulle. Tällöin $h_A(x) = \mathbb{P}_x(T_A < \infty)$, missä T_A on ketjun kulkuaika tilajoukkoon A. Jos alkutila $x \in A$, niin ketju varmuudella käy joukossa A, joten $h_A(x) = 1$. Oletetaan seuraavaksi, että $x \notin A$. Markov-ominaisuutta käyttämällä voidaan päätellä, että tällöin

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(T_A < \infty \,|\, X_1 = y) &= \mathbb{P}(T_A < \infty \,|\, X_1 = y, X_0 = x) \\ &= \mathbb{P}(T_A < \infty \,|\, X_1 = y) \\ &= h_A(y), \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} h_A(x) &= \mathbb{P}_x(T_A < \infty) \\ &= \sum_{y \in S} \mathbb{P}_x(X_1 = y) \mathbb{P}_x(T_A < \infty \,|\, X_1 = y) \\ &= \sum_{y \in S} P(x,y)\, h_A(y). \end{aligned}$$

Näin ollen $(h_A(x) : x \in S)$ muodostaa yhtälöryhmän (4.10) ei-negatiivisen ratkaisun.

Oletetaan seuraavaksi, että $f = (f(x) : x \in S)$ on jokin yhtälöryhmän (4.10) ei-negatiivinen ratkaisu ja näytetään, että $f(x) \geq h_A(x)$ kaikilla x. Tällöin selvästikin $f(x) = h_A(x) = 1$ kaikilla $x \in A$. Jos $x \notin A$, niin

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{y \in S} P(x,y) f(y) \\ &= \sum_{y \in A} P(x,y) + \sum_{y \notin A} P(x,y) f(y) \\ &= \mathbb{P}_x(X_1 \in A) + \sum_{y \notin A} P(x,y) f(y). \end{aligned}$$

Sijoittamalla yo. yhtälön oikealle puolelle $f(y)$:n lauseke nähdään, että

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbb{P}_x(X_1 \in A) + \sum_{y \notin A} P(x,y) \left(\sum_{z \in A} P(y,z) + \sum_{z \notin A} P(y,z) f(z) \right) \\ &= \mathbb{P}_x(X_1 \in A) + \mathbb{P}_x(X_1 \notin A, X_2 \in A) + \sum_{y \notin A} \sum_{z \notin A} P(x,y) P(y,z) f(z) \\ &= \mathbb{P}_x(T_A = 1) + \mathbb{P}_x(T_A = 2) + \sum_{y \notin A} \sum_{z \notin A} P(x,y) P(y,z) f(z). \end{aligned}$$

Toistamalla tällaista päätelmää rekursiivisesti havaitaan, että

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbb{P}_x(T_A = 1) + \cdots + \mathbb{P}_x(T_A = t) \\ &\quad + \sum_{y_1 \notin A} \cdots \sum_{y_t \notin A} P(x, y_1) P(y_1, y_2) \cdots P(y_{t-1}, y_t) f(y_t). \end{aligned}$$

Koska $f \geq 0$, voidaan tästä päätellä, että

$$f(x) \geq \mathbb{P}_x(T_A = 1) + \cdots + \mathbb{P}_x(T_A = t)$$

kaikilla kokonaisluvuilla $t \geq 1$, joten viemällä $t \to \infty$ ja käyttämällä alla olevaa lemmaa 4.9, todetaan että

$$f(x) \geq \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(T_A) = t) = \mathbb{P}_x(T_A < \infty) = h_A(x).$$

□

5 Äärettömän tilajoukon Markov-ketjut

Äärellisen tilajoukon yhtenäisellä ja jaksottomalla Markov-ketjulla on aina yksikäsitteinen tasapainojakauma, johon myös ketjun tilajakauma suppenee, alkutilasta riippumatta. Äärettömässä tilajoukossa tämä *ei* pidä paikkaansa.

5.1 Määritelmä ja esimerkkejä

Numeroituvasti äärettömän tilajoukon Markov-ketju on satunnaisprosessi, joka siirtyy tilasta x tilaan y todennäköisyydellä $P(x, y)$ aiemmista tiloista riippumatta. Tämä määritelmä on täysin sama kuin äärellisen tilajoukon ketjulle luvussa 2 ja se voidaan täsmällisesti ilmaista yhtälön (2.1) avulla. Ainoa ero on, että ketjun siirtymämatriisi $P = \{P(x, y) : x, y \in S\}$ on tällä kertaa ääretön. Ääretön siirtymämatriisi on usein luontevaa mieltää funktioksi $P : S \times S \to [0, 1]$, joka kuvaa tilaparin (x, y) todennäköisyydeksi $P(x, y)$.

Luvussa 5.2 nähdään, miten äärettömiä siirtymämatriiseja voidaan käsitellä hyvin samaan tapaan kuin äärellisiäkin. Katsotaan ensiksi kaksi keskistä esimerkkiä äärettömän tilajoukon ketjuista.

Esimerkki 5.1 (Satunnaiskulku positiivisilla kokonaisluvuilla)**.** Äärettömässä lukujoukossa $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ kulkee hiukkanen, joka kullakin aika-askeleella menneisyydestä riippumatta siirtyy tilasta $x \geq 1$ oikealle todennäköisyydellä p, vasemmalle todennäköisyydellä q ja muuten pysyy paikallaan. Tilasta 0 se siirtyy oikealle todennäköisyydellä p ja muuten pysyy paikallaan. Hiukkasen paikka t:n aika-askeleen jälkeen on äärettömän tilajoukon $\mathbb{Z}_+$ Markov-ketju, jonka siirtymämatriisin alkiot ovat

$$P(0, y) = \begin{cases} 1 - p, & y = 0, \\ p, & y = 1, \\ 0, & \text{muuten}, \end{cases}$$

ja

$$P(x, y) = \begin{cases} q, & y = x - 1, \\ 1 - p - q, & y = x, \\ p, & y = x + 1, \\ 0, & \text{muuten}, \end{cases}$$

kun $x \geq 1$. Merkitsemällä $r = 1 - p - q$ voidaan tämä ääretön matriisi kirjoittaa muodossa

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & \cdots & & & & \\ q & r & p & 0 & \cdots & & & \\ 0 & q & r & p & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & q & r & p & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & q & r & p & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Kun $p, q > 0$, on siirtymäkaaviosta helppo nähdä, että ketju on yhtenäinen. Lisäksi $P(0,0) > 0$, joten ketju on jaksoton.

5.2 Äärettömän tilajoukon jakaumat ja siirtymämatriisit

Numeroituvasti äärettömän tilajoukon alkiot voidaan numeroida positiivisia kokonaislukuja käyttäen muodossa $S = \{x_1, x_2, \dots\}$. Tällaisen tilajoukon todennäköisyysjakauma on kuvaus $\mu : S \to [0,1]$, jolle pätee

$$\sum_{x \in S} \mu(x) = 1. \tag{5.1}$$

Käyttämällä edellämainittua tilajoukon numerointia voidaan ylläoleva ääretön summa kirjoittaa muodossa

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(x_i) = 1.$$

Positiivitermisten summien teoriasta tiedetään, että yhtälön (5.1) vasen puoli ei riipu siitä, miten tilajoukon alkiot numeroidaan, joten jatkossa numerointi jätetään yleensä merkitsemättä. Kuten äärellisessäkin tapauksessa, todennäköisyysjakauma $\mu = (\mu(x) : x \in S)$ on Markov-ketjujen yhteydessä hyvä tulkita tilajoukolla S indeksoituna vaakavektorina.

Numeroituvasti äärettömän tilajoukon siirtymämatriisi on kuvaus $P : S \times S \to [0,1]$, jolle pätee

$$\sum_{y \in S} P(x,y) = 1 \quad \text{kaikilla } x \in S,$$

eli äärettömän neliömatriisin P äärettömät rivisummat ovat ykkösiä. Äärettömällä siirtymämatriisilla kerrotaan vaakavektoreina tulkittuja todennäköisyysjakaumia vasemmalta ja pystyvektoreina tulkittuja rajoitettuja funktioita oikealta samaan tapaan kuin äärellisessäkin tapauksessa. Jos μ on joukon S todennäköisyysjakauma, niin (ääretön vaakavektori) μP määritellään kaavalla

$$\mu P(y) = \sum_{x \in S} \mu(x) P(x,y), \quad y \in S.$$

Tällöin selvästi $\mu P(y) \geq 0$ kaikilla $y \in S$. Lisäksi positiivisten termien summausjärjestystä vaihtamalla nähdään, että

$$\sum_{y \in S} \mu P(y) = \sum_{y \in S} \sum_{x \in S} \mu(x) P(x,y) = \left(\sum_{x \in S} \mu(x) \right) \left(\sum_{y \in S} P(x,y) \right) = 1,$$

joten myös (ääretön vaakavektori) μP on tilajoukon S todennäköisyysjakauma.

Kahden siirtymämatriisin $P, Q : S \times S \to [0,1]$ tulo $R = PQ$ määritellään kaavalla

$$R(x,z) = \sum_{y \in S} P(x,y) Q(y,z), \quad x, z \in S.$$

Tällöin $R(x,z) \geq 0$ kaikilla x, z. Vaihtamalla ei-negatiivitsen termien summausjärjestystä lisäksi nähdään, että

$$\sum_{z \in S} R(x,z) = \sum_{z \in S} \sum_{y \in S} P(x,y) Q(y,z) = \sum_{y \in S} P(x,y) \sum_{z \in S} Q(y,z) = 1.$$

Näin ollen kahden siirtymämatriisin tulo on myös siirtymämatriisi. Matriisitulon avulla määritellään matriisin potenssit tavalliseen tapaan eli $P^0 = I$, missä identiteettimatriisi $I : S \times S \to [0,1]$ määritellään alkioittain

$$I(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y, \end{cases}$$

ja rekursiivisesti $P^{t+1} = P^t P$ kaikilla $t = 0, 1, 2, \ldots$

5.3 Hetkittäiset tilajakaumat

Seuraava tulos on mukava nähdä teorian näkökulmasta, mutta käytännössä äärettömän matriisin potensseja ei noin vain voi tietokoneella laskea.

Lause 5.2. *Markov-ketjun tilajakauma mielivaltaisella ajanhetkellä $t = 0, 1, 2, \ldots$ saadaan laskettua alkujakaumasta kaavalla*

$$\mu_t = \mu_0 P^t, \tag{5.2}$$

missä P^t on siirtymämatriisin t:s potenssi. Todennäköisyys, että Markov-ketju siirtyy t:n aika-askeleen aikana tilasta x tilaan y saadaan siirtymämatriisin avulla kaavasta

$$\mathbb{P}(X_t = y \mid X_0 = x) = P^t(x,y).$$

Todistus. Lauseen 2.4 ja lauseen 2.6 todistukset toimivat myös numeroituvasti äärettömässä tilajoukossa. $\square$

5.4 Pitkän aikavälin käyttäytyminen

5.4.1 Markov-ketjun peitelause

Seuraava tulos kertoo, että tietyin ehdoin Markov-ketjun polku varmuudella peittää koko tilajoukon, vieläpä äärettömän monta kertaa.

Lause 5.3. *Jos numeroituvan tilajoukon yhtenäisellä Markov-ketjulla on olemassa tasapainojakauma π, niin todennäköisyydellä 1 ketju käy äärettömän monta kertaa jokaisessa tilajoukon tilassa.*

Lauseen todistamiseksi määritellään muutamia palautuvuuteen liittyviä käsitteitä. Markov-ketjun $(X_0, X_1, \dots)$ *ensimmäinen siirtymähetki* tilaan y määritellään kaavalla

$$T_y^+ \;=\; \min\{t \geq 1 : X_t = y\}.$$

Todennäköisyyttä, että tilasta x käynnistyvä ketju joskus siirtyy tilaan y, merkitään

$$\rho(x,y) = \mathbb{P}_x(T_y^+ < \infty).$$

Kun $x = y$, on ylläoleva luku tilan x *paluutodennäköisyys*. Kun $x \neq y$, on $\rho(x,y)$ ketjun *kulkutodennäköisyys* tilasta x tilaan y. Huomaa, että $\rho(x,y)$ kertoo todennäköisyyden kulkea jotain polkua pitkin tilasta x tilaan y, kun taas $P(x,y)$ kertoo, millä todennäköisyydellä ketju *yhdellä askeleella* siirtyy x:stä y:hyn. Aina pätee siis epäyhtälö

$$\rho(x,y) \geq P(x,y).$$

Tila x on *palautuva*, jos $\rho(x,x) = 1$, ja *väistyvä*, jos $\rho(x,x) < 1$. Voidaan näyttää, että äärellisen tilajoukon yhtenäisen ketjun kaikki tilat ovat palautuvia. Äärettömässä tilajoukossa näin ei välttämättä ole.

Lemma 5.4. *Jos palautuvasta tilasta x on mahdollista kulkea tilaan $y \neq x$, niin tällöin $\rho(y,x) = 1$.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan $\rho(y,x) < 1$. Olkoon $t \geq 1$ pienin kokonaisluku siten, että ketjun siirtymäkaaviossa on olemassa t:n askeleen polku $x = x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_t = y$. Tällöin x ei kuulu joukkoon $\{x_1, \dots, x_t\}$, sillä muuten löydettäisiin lyhyempi polku tilasta x tilaan y. Tällöin todennäköisyys, että tilasta x käynnistyvä ketju ei koskaan palaa alkutilaansa, toteuttaa

$$\mathbb{P}_x(T_x^+ = \infty) \;\geq\; P(x_0,x_1)P(x_1,x_2)\cdots P(x_{t-1},x_t)(1-\rho(y,x)) \;>\; 0.$$

Tämä on ristiriidassa oletuksen $\rho(x,x) = 1$ kanssa, joten vastaoletus ei voi pitää paikkaansa. □

Lauseen 5.3 todistus. Olkoon $(X_0, X_1, \dots)$ numeroituvan tilajoukon S yhtenäinen Markov-ketju, jolla on tasapainojakauma π. Perustellaan aluksi, että

$$\pi(y) > 0 \quad \text{kaikilla } y \in S. \tag{5.3}$$

Valitaan ensin jokin tila x_0 siten, että $\pi(x_0) > 0$. Yhtenäisyyden perusteella $x_0 \rightsquigarrow y$, joten $P^t(x_0, y) > 0$ jollain kokonaisluvulla $t \geq 0$. Koska $\pi P = \pi$, pätee myös $\pi P^t = \pi$, joten

$$\pi(y) = \sum_{x \in S} \pi(x) P^t(x, y) \geq \pi(x_0) P^t(x_0, y) > 0.$$

Tarkastellaan seuraavaksi tapahtumaa A_y, että tila y esiintyy ketjussa, mutta vain äärellisen monta kertaa. Tämä tapahtuma voidaan esittää erillisenä yhdisteenä $A_y = \cup_{t=0}^{\infty} A_{y,t}$, missä

$$A_{y,t} \;=\; \{X_t = y,\, X_{t+1} \neq y,\, X_{t+2} \neq y, \dots\}$$

on tapahtuma, että tila y esiintyy ketjussa viimeisen kerran ajanhetkellä t. Tasapainojakaumasta käynnistyvälle ketjulle pätee

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(A_{y,t}) &= \mathbb{P}_x(X_t = y)\, \mathbb{P}_x(X_{t+1} \neq y,\, X_{t+2} \neq y, \dots \mid X_t = y) \\
&= \mathbb{P}_x(X_t = y)\, \mathbb{P}_y(X_1 \neq y,\, X_2 \neq y, \dots) \\
&= P^t(x, y)(1 - \rho(y, y)).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Kertomalla molemmat puolet $\pi(x)$:llä ja summaamalla x:n suhteen nähdään, että tasapainojakaumasta käynnistyvälle ketjulle

$$\mathbb{P}_\pi(A_{y,t}) \;=\; \sum_{x \in S} \pi(x) \mathbb{P}_x(A_{y,t}) \;=\; \sum_{x \in S} \pi(x) P^t(x, y)(1 - \rho(y, y)) \;=\; \pi(y)(1 - \rho(y, y)).$$

Summaamalla yli kaikkien ajanhetkien nähdään, että

$$\mathbb{P}_\pi(A_y) \;=\; \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}_\pi(A_{y,t}) \;=\; \sum_{t=0}^{\infty} \pi(y)(1 - \rho(y, y)).$$

Koska oikean puolen summan termit eivät riipu t:stä, on jokaisen termin pakko olla nolla. Koska lisäksi $\pi(y) > 0$ epäyhtälön (5.3) nojalla, tästä seuraa, että $\rho(y, y) = 1$. Näin ollen jokainen ketjun tila on palautuva.

Olkoon U_y tapahtuma, että tila y esiintyy ketjussa äärettömän monta kertaa. Tämän tapahtuman vastakohta voidaan esittää muodossa $U_y^c = A_y \cup B_y$, missä B_y on tapahtuma, että tila y ei koskaan esiinny ketjussa. Yhtälöstä (5.4) nyt seuraa, että $\mathbb{P}_x(A_{y,t}) = 0$ kaikilla $t \geq 0$ ja näin ollen myös $\mathbb{P}_x(A_y) = 0$. Kun $y = x$, niin triviaalisti $\mathbb{P}_x(B_y) = 0$. Kun $y \neq x$, niin $\mathbb{P}_x(B_y) = 1 - \rho(x, y)$. Koska ketju on yhtenäinen, voidaan Lemman 5.4 avulla päätellä, että $\rho(x, y) = 1$, joten $\mathbb{P}_x(B_y) = 0$ myös tässä tapauksessa. Tästä seuraa, että

$$\mathbb{P}_x(U_y^c) \;=\; \mathbb{P}_x(A_y) + \mathbb{P}(B_y) \;=\; 0.$$

Merkitään vielä U:lla tapahtumaa, että ketju käy kaikissa tilajoukon tiloissa äärettömän monta kertaa. Tämän tapahtuman vastakohta voidaan esittää muodossa $U^c = \cup_{y \in S} U_y^c$. Näin ollen tapahtumien yhdisteiden summaestimaattia käyttämällä

$$\mathbb{P}_x(U^c) \le \sum_{y \in S} \mathbb{P}_x(U_y^c) = 0,$$

josta päätellään, että $\mathbb{P}_x(U) = 1$. Sama havainto pätee mielivaltaisella alkujakaumalle μ_0, sillä

$$\mathbb{P}_{\mu_0}(U) = \sum_{x \in S} \mu_0(x) \mathbb{P}_x(U^c) = \sum_{x \in S} \mu_0(x) = 1.$$

□

5.4.2 Suppenemislause

Lause 5.5. *Jos numeroituvan tilajoukon yhtenäisellä ja jaksottomalla Markov-ketjulla on olemassa tasapainojakauma π, niin kyseinen tasapainojakauma on yksikäsitteinen ja hetkittäiset tilajakaumat $\mu_t(y) = \mathbb{P}(X_t = y)$ toteuttavat*

$$\sum_y |\mu_t(y) - \pi(y)| \to 0, \quad \textit{kun } t \to \infty, \tag{5.5}$$

alkujakaumasta riippumatta.

Todennäköisyysjakaumien μ ja ν *kokonaisvaihteluetäisyys* voidaan määritellään kaavalla $||\mu - \nu||_{\mathrm{TV}} = \frac{1}{2} \sum_{x \in S} |\mu(x) - \nu(x)|$. Tällöin (5.5) on yhtäpitävää tuloksen $||\mu_t - \pi||_{\mathrm{TV}} \to 0$ kanssa. Kun (5.5) pätee, niin pätee myös $\mu_t(y) \to \pi(y)$ kaikilla $y \in S$. Valitsemalla alkujakaumaksi δ_x tästä seuraa myös, että $P^t(x, y) \to \pi(y)$ kaikilla $x, y \in S$.

Todistus. Olkoon S ketjun tilajoukko. Määritellään tulojoukkoon $S \times S$ siirtymämatriisi $\tilde{P}$ kaavalla

$$\tilde{P}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \;=\; P(x_1, y_1) P(x_2, y_2), \quad (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in S \times S.$$

Tämä matriisi kuvastaa tulojoukon $S \times S$ Markov-ketjua, jonka molemmat komponentin liikkuvat toisistaan riippumattomasti tehden siirtymiä matriisin P todennäköisyyksin. On helppo näyttää, että $\tilde{\pi}(x, y) = \pi(x)\pi(y)$ on siirtymämatriisin $\tilde{P}$ tasapainojakauma. Voidaan myös näyttää (tähän tarvitaan P:n jaksottomuutta), että $\tilde{P}$ on yhtenäinen.

Olkoon $((X_0, Y_0), (X_1, Y_1), \dots)$ jokin tulojoukon $S \times S$ Markov-ketju, joka etenee siirtymämatriisin $\tilde{P}$ mukaisesti. Tällöin $(X_0, X_1, \dots)$ ja $(Y_0, Y_1, \dots)$ ovat siirtymämatriisin P mukaan eteneviä Markov-ketjuja. Olkoon

$$\tau = \min\{t \ge 0 : X_t = Y_t\}$$

näiden kahden satunnaisprosessin ensimmäinen kohtaushetki. Tämä kohtaushetki on enintään yhtä suuri kuin mielivaltaisen tilan (z, z) ensimmäinen esiintymishetki $T_{(z,z)}$ ketjulle (X_t, Y_t). Koska ketju (X_t, Y_t) on yhtenäinen ja sillä on olemassa tasapainojakauma $\tilde{\pi}$, käy ketju peitelauseen 5.3 mukaan varmuudella aikanaan kaikissa tilajoukon tiloissa, joten $\tau \leq T_{(z,z)} < \infty$ todennäköisyydellä yksi. Näin ollen

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$$

alkujakaumasta riippumatta.

Todetaan seuraavaksi, että

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_t = y, \tau \leq t) &= \sum_{s=0}^{t} \sum_{x} \mathbb{P}(\tau = s, X_s = x, X_t = y) \\
&= \sum_{s=0}^{t} \sum_{x} \mathbb{P}(\tau = s, X_s = x)\, \mathbb{P}(X_t = y \,|\, X_s = x) \\
&= \sum_{s=0}^{t} \sum_{x} \mathbb{P}(\tau = s, Y_s = x)\, \mathbb{P}(Y_t = y \,|\, Y_s = x) \\
&= \mathbb{P}(Y_t = y, \tau \leq t).
\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}(X_t = y) - \mathbb{P}(Y_t = y)| &= |\mathbb{P}(X_t = y, \tau > t) - \mathbb{P}(Y_t = y, \tau > t)| \\
&\leq \mathbb{P}(X_t = y, \tau > t) + \mathbb{P}(Y_t = y, \tau > t),
\end{aligned}$$

ja summamalla molemmat puolet y:n suhteen

$$\sum_{y} |\mathbb{P}(X_t = y) - \mathbb{P}(Y_t = y)| \;\leq\; 2\mathbb{P}(\tau > t).$$

Koska

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}(\tau > t) = \mathbb{P}(\tau = \infty) = 0,$$

todetaan että

$$\sum_{y} |\mathbb{P}(X_t = y) - \mathbb{P}(Y_t = y)| \;\to\; 0$$

ketjun (X_t, Y_t) alkujakaumasta riippumatta.

Valitaan nyt ketjun (X_t, Y_t) alkujakaumaksi $\tilde{\mu}_0(x, y) = \mu_0(x)\pi(y)$, missä μ_0 on mielivaltainen tilajoukon S jakauma. Tällöin $\mathbb{P}(Y_t = y) = \pi(y)$ kaikilla t, joten ketjun X_t tilajakaumalle $\mu_t(x) = \mathbb{P}(X_t = x)$ pätee

$$\sum_{y} |\mu_t(y) - \pi(y)| \;\to\; 0.$$

$\square$

5.5 Kääntyvyys

Numeroituvan tilajoukon S siirtymämatriisi P ja sitä vastaava Markov-ketju on *kääntyvä* todennäköisyysjakauman π suhteen, jos π toteuttaa *pareittaiset tasapainoyhtälöt*

$$\pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x) \tag{5.6}$$

kaikilla $x, y \in S$.

Lause 5.6. *Jos P on kääntyvä jakauman π suhteen, niin tällöin π on P:n tasapainojakauma.*

Todistus. Jos (5.6) pätee, niin tällöin kaikilla $y \in S$,

$$\sum_{x \in S} \pi(x)P(x,y) \;=\; \sum_{x \in S} \pi(y)P(y,x) \;=\; \pi(y) \sum_{x \in S} P(y,x) \;=\; \pi(y).$$

Näin ollen $\pi P = \pi$. □

Kääntyvyys voidaan tulkita ajan kääntämisen suhteen seuraavasti. Oletetaan, että $(X_0, X_1, \dots)$ on siirtymämatriisin P mukaan etenevä jakauman π suhteen kääntyvä ketju, joka käynnistetään hetkellä $t = 0$ tasapainojakaumasta π. Pareittaisia tasapainoyhtälöitä (5.6) hyödyntämällä voidaan tällöin näyttää (hyvä harjoitustehtävä), että

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_t = x_t) &= \pi(x_0)P(x_0,x_1)P(x_1,x_2)\cdots P(x_{t-1},x_t) \\
&= \pi(x_t)P(x_t,x_{t-1})\cdots P(x_1,x_0) \\
&= \mathbb{P}(X_t = x_0, X_{t-1} = x_1, \dots, X_0 = x_t)
\end{aligned}$$

Tästä voidaan päätellä, että tasapainojakaumasta käynnistyvä kääntyvä ketju näyttää tilastollisesti täysin samalta etuperin ja takaperin ajassa tarkasteltuna. Tasapainossa olevan kääntyvän ketjun simuloitua videokuvaa tarkkailemalla ei siis voida päätellä, toistetaanko videota etuperin vai takaperin.

5.6 Syntymiskuolemisketjut

Äärellisen tai numeroituvasti äärettömän tilajoukon $S \subset \mathbb{Z}_+$ *syntymiskuolemisketju* on Markov-ketju, jonka siirtymämatriisille pätee $P(x,y) = 0$ aina kun $|x-y| > 1$. Tällainen ketju voi siis yhdellä aika-askeleella ainoastaan siirtyä yhden askeleen vasemmalle, yhden askeleen oikealle tai pysyä paikallaan. Yleensä tilajoukkona on kaikki ei-negatiiviset luvut $\mathbb{Z}_+$, jollei toisin mainita. Merkitään tilassa x prosessin syntymätodennäköisyyttä $\beta_x = P(x, x+1)$ ja kuolematodennäköisyyttä $\gamma_x = P(x, x-1)$. Tällöin todennäköisyys pysyä paikallaan on $1 - \beta_x - \gamma_x$.

Tarkastellaan yhtenäistä $\mathbb{Z}_+$:n syntymiskuolemisketjua, jolloin $\beta_x > 0$ kaikilla $x \geq 0$ ja $\gamma_x > 0$ kaikilla $x \geq 1$. Kokeillaan etsiä ketjulle tasapainojakaumaa

π. Tässä tapauksessa tasapainoyhtälöt voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}
\pi(0) &= (1-\beta_0)\pi(0) + \gamma_1\pi(1), \\
\pi(1) &= \beta_0\pi(0) + (1-\beta_1-\gamma_1)\pi(1) + \gamma_2\pi(2), \\
\pi(2) &= \beta_1\pi(1) + (1-\beta_2-\gamma_2)\pi(2) + \gamma_3\pi(3), \\
\pi(3) &= \dots
\end{aligned}$$

Tätä yhtälöryhmää tarkastelemassa (harjoitustehtävä) voidaan tarkistaa, että jokainen yhtälöryhmän ratkaisu toteuttaa

$$\gamma_{x+1}\pi(x+1) = \beta_x\pi(x), \quad x = 0,1,2,\dots$$

Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että π toteuttaa pareittaiset tasapainoyhtälöt

$$\pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x) \quad \text{kaikilla } x,y \in \mathbb{Z}_+.$$

Näin ollen jos syntymiskuolemisketjulla on olemassa tasapainojakauma π, on kyseinen ketju myös kääntyvä π:n suhteen.

Esimerkki 5.7 (Satunnaiskulku positiivisilla kokonaisluvuilla)**.** Esimerkin 5.1 satunnaiskulku on syntymiskuolemisketju, jolle $\beta_x = p$ kaikilla $x \geq 0$ ja $\gamma_x = q$ kaikilla $x \geq 1$. Pareittaiset tasapainoyhtälöt tälle ketjulle ovat

$$q\pi(x+1) = p\pi(x), \quad x = 0,1,2,\dots$$

Merkitsemällä $c = \pi(0)$ ja $\alpha = p/q$, havaitaan että $\pi(1) = c\alpha$, $\pi(2) = \alpha\pi(1) = c\alpha^2$, jne. Jos tasapainojakauma on olemassa, se voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$\pi(x) = c\alpha^x, \quad x = 0,1,2,\dots$$

Summaamalla ylläoleva yhtälö x:n suhteen voidaan todeta, että kun $p < q$ ($\alpha < 1$), ketjulla on tasapainojakauma

$$\pi(x) = (1-\alpha)\alpha^x, \quad x = 0,1,2,\dots$$

Tällöin peitelauseen (lause 5.3) perusteella ketju varmuudella käy kaikissa $\mathbb{Z}_+$:n tiloissa äärettömän monta kertaa. Näin ollen, todennäköisyydellä yksi, ketjun polut harhailevat loputtomiin tilajoukon kaikissa tiloissa ja pätee

$$\liminf_{t\to\infty} X_t = 0 \quad \text{ja} \quad \limsup_{t\to\infty} X_t = \infty.$$

Toisaalta suppenemislauseen (lause 5.5) perusteella ketjun hetkittäiset tilajakaumat μ_t lähestyvät tasapainojakaumaa π, eli tilastollisessa mielessä ketjun käyttäytyminen silti pysyy aisoissa pitkälläkin aikavälillä.

Tapauksessa $p \geq q$ ($\alpha \geq 1$) taas ketjulla ei ole tasapainojakaumaa. Tapauksessa $p > q$ voidaan näyttää, että tällöin $X_t \to \infty$ todennäköisyydellä yksi ja kaikki tilat ovat väistyviä ja esim. tilasta 1 käynnistyvä ei välttämättä koskaan käy tilassa 0. Tapauksessa $p = q$ voidaan näyttää, että kaikki tilat ovat palautuvia ja ketju varmuudella käy kaikissa tiloissa äärettömän usein, mutta ketjulla ei kuitenkaan ole olemassa tasapainojakaumaa.

5.7 Haarautumisprosessit

5.7.1 Siirtymämatriisi

Haarautumisprosessi on tilajoukon $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ Markov-ketju $(X_0, X_1, \dots)$, jolla mallinnetaan populaatiota, jossa jokainen sukupolven t yksilö muista riippumatta tuottaa satunnaisen määrän jälkeläisiä, jotka muodostavat sukupolven $t+1$ populaation. Haarautumisprosessin parametrina on tilajoukon $\mathbb{Z}_+$ *lisääntymisjakauma* $p = (p(0), p(1), p(2), \dots)$, jonka alkio $p(k)$ kertoo, millä todennäköisyydellä yksilö tuottaa k jälkeläistä. Haarautumisprosessin alkutila kertoo populaation koon alkuhetkellä (sukupolvi $t = 0$). Haarautumisprosessien tutkimus tuli tunnetuksi englantilaisen Francis Galtonin vuonna 1873 julkaisemasta sukunimien säilymiseen liittyvästä kysymyksestä, johon hän Thomas Watsonin kanssa pari vuotta myöhemmin esitti ratkaisun. Tämän vuoksi haarautumisprosesseja usein kutsutaan nimellä *Galton–Watson-prosessi.*

Jos sukupolvessa X_t on $x \geq 1$ yksilöä, niin sukupolven $t+1$ yksilöiden lukumäärä voidaan kirjoittaa summana

$$X_{t+1} = Y_1 + \cdots Y_x,$$

missä $Y_1, Y_2, \dots$ ovat riippumattomia lisääntymisjakaumaa noudattavia satunnaislukuja. Näin ollen ketjun siirtymätodennäköisyys tilasta $x \geq 1$ tilaan $y \geq 0$ on

$$P(x,y) = \mathbb{P}(Y_1 + \cdots + Y_x = y). \tag{5.7}$$

Jos taas sukupolvessa t ei ole yhtään yksilöä, niin lisääntymistä ei voi tapahtua ja

$$P(0,y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases} \tag{5.8}$$

Tila 0 on siis ketjun absorboiva tila. Kun ketju päätyy tilaan 0, on populaatio kuollut sukupuuttoon. Ketjun kulkuaikaa $T_0 = \min\{t \geq 0 : X_t = 0\}$ kutsutaan haarautumisprosessin *elinajaksi.* Galtonin kuuluisa kysymys oli:

> Millä todennäköisyydellä populaatio aikanaan kuolee sukupuuttoon?

Toisin sanoen, mikä on tilan 0 osumatodennäköisyys $\mathbb{P}(T_0 < \infty)$?

5.7.2 Generoivat funktiot

Kun lisääntymisjakauma p on valittu, kaavat (5.7)–(5.8) määrittävät haarautumisprosessin tilajoukolla $\mathbb{Z}_+$ indeksoidun äärettömän siirtymämatriisin P kaikki arvot yksikäsitteisesti. Ongelmana vain on, että kaavasta (5.7) voi olla hankalaa laskea suoraan siirtymämatriisin tarkkoja lukuarvoja. Esimerkiksi alkion $P(3,7)$ selvittämiseksi täytyy laskea summa

$$P(3,7) = \sum_{y_1} \sum_{y_2} \sum_{y_3} 1(y_1 + y_2 + y_3 = 7)\, p(y_1) p(y_2) p(y_3).$$

Tällaisten lausekkeiden käsittelyyn tarjoaa oivan apukeinon todennäköisyydet generoiva funktio. Lisääntymisjakaumaa p noudattavan satunnaisluvun Y *todennäköisyydet generoiva funktio (tngf)* on kuvaus $\phi : [-1,1] \to \mathbb{R}$, joka määritellään kaavalla

$$\phi_Y(s) \;=\; \mathbb{E}s^Y \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} s^k p(k). \tag{5.9}$$

Jos todennäköisyydet $p(k)$ vaimenevat riittävän nopeasti nollaan suurilla k:n arvoilla, voidaan ϕ_Y määritellä myös väliä $[-1,1]$ suuremmassa joukossa. Tngf:n ϕ_Y arvot välillä $[-1,1]$ kuitenkin määrittävät jakauman p yksikäsitteisesti, sillä kaavan (5.9) oikean puolen potenssisarjan suppenemissäde on aina vähintään yksi, ja näin ollen ylläolevaa summaa voi rajatta derivoida termeittäin jokaisessa avoimen välin $(-1,1)$ pisteessä. Näin siis k kertaa ϕ_Y:tä nollassa derivoimalla löydetään

$$\mathbb{P}(Y=k) \;=\; p(k) \;=\; \frac{\phi_Y^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Generoivien funktioiden hyödyllisyys perustuu siihen, että riippumattomien satunnaislukujen summan generoiva funktio on helppo laskea. Nimittäin jos X ja Y ovat riippumattomia $\mathbb{Z}_+$-arvoisia satunnaislukuja, niin tällöin

$$\phi_{X+Y}(s) = \mathbb{E}s^{X+Y} = \mathbb{E}s^X s^Y = \mathbb{E}s^X \mathbb{E}s^Y = \phi_X(s)\phi_Y(s).$$

Erityisesti siis kaikille riippumattomille ja samoin jakautuneille satunnaisluvuille $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ on voimassa kaava

$$\phi_{Y_1+\cdots+Y_n}(s) = \phi_{Y_1}(s)^n. \tag{5.10}$$

Näin ollen esimerkiksi haarautumisprosessin siirtymämatriisin alkio $P(3,7)$ voidaan kaavan (5.7) perusteella laskea kirjoittamalla $\phi_{Y_1}(s)^3$ potenssisarjaksi ja selvittämällä saadun potenssisarjan potenssia s^7 vastaava termi. Tämän voi tehdä derivoimalla funktiota $\phi_{Y_1}(s)^3$ seitsemän kertaa nollassa ja jakamalla lopputulos seitsemän kertomalla.

Seuraava tulos yleistää kaavan (5.10) tapaukseen, missä myös summattavien lukumäärä on satunnainen. (Allaolevassa satunnaissumman määritelmässä $\sum_{k=1}^{0} Y_k$ määritellään nollaksi.)

Lause 5.8. *Jos $Y_1, Y_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita $\mathbb{Z}_+$-arvoisia satunnaislukuja ja N näistä riippumaton $\mathbb{Z}_+$-arvoinen satunnaisluku, niin tällöin satunnaisluvun*

$$Z = \sum_{k=1}^{N} Y_k$$

tngf saadaan lausekkeesta $\phi_Z(s) = \phi_N(\phi_{Y_1}(s))$.

Todistus. Ehdollistamalla N:n saamaan arvoon ja riippumattomuutta ja kaavaa (5.10) hyödyntämällä havaitaan, että

$$\begin{aligned}\phi_Z(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n)\, \mathbb{E}\left(s^{\sum_{k=1}^{N} Y_k} \,|\, N=n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n)\, \mathbb{E}\left(s^{\sum_{k=1}^{n} Y_k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n)\, \phi_{Y_1}(s)^n \\ &= \phi_N(\phi_{Y_1}(s)).\end{aligned}$$

Todetaan vielä, että tapahtuman $N=0$ vallitessa $Z=0$ määritelmän mukaan. Ylläoleva laskelma toimii myös summausindeksille $n=0$, sillä $\phi_{Y_1}(s)^0 = 1$, mikä vastaa ei-satunnaisen luvun $Z=0$ generoivaa funktiota $\phi_0(s) = s^0 = 1$. □

5.7.3 Odotettu populaation koko

Seuraava tulos kertoo populaation odotetun koon ajan suhteen haarautumisprosessissa, jossa

$$m = \mathbb{E}(Y_1)$$

on yksilön tuottamien jälkeläisten odotettu lukumäärä. Lauseen seurauksena nähdään, että populaation odotettu koko lähestyy nollaa kun $m < 1$, ja kasvaa kohti ääretöntä eksponentiaalisen nopeasti kun $m > 1$.

Lause 5.9. *Tilasta x käynnistyvässä haarautumisprosessissa sukupolven t odotettu koko saadaan kaavasta*

$$\mathbb{E}_x(X_t) = x m^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Todistus. Ehdollistamalla ajanhetken t tilan suhteen havaitaan, että

$$\mathbb{E}(X_{t+1} \,|\, X_t = y) \;=\; \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{x} Y_k \,\middle|\, X_t = y\right) \;=\; \sum_{k=1}^{y} \mathbb{E}\left(Y_k \,|\, X_t = y\right) \;=\; my,$$

missä $m = \mathbb{E}Y_1$ on yksilön tuottamien jälkeläisten odotettu määrä. Kertomalla molemmat puolet $\mathbb{P}(X_t = y)$:llä ja summaamalla y:n suhteen tästä seuraa, että

$$\mathbb{E}(X_{t+1}) \;=\; \sum_{y=0}^{\infty} \mathbb{E}(X_{t+1} \,|\, X_t = y)\mathbb{P}(X_t = y) \;=\; \sum_{y=0}^{\infty} mx\mathbb{P}(X_t = y) \;=\; m\mathbb{E}(X_t).$$

Väite seuraa tästä induktiolla. □

5.7.4 Sukupuuton todennäköisyys

Palautetaan mieliin Galtonin alkuperäinen kysymys. Ketjun kulkuaikaa $T_0 = \min\{t \geq 0 : X_t = 0\}$ kutsutaan haarautumisprosessin *elinajaksi*. Millä todennäköisyydellä populaatio aikanaan kuolee sukupuuttoon eli mikä on tilan 0 osumatodennäköisyys $\mathbb{P}_x(T_0 < \infty)$? Todetaan ensiksi, että jos alussa on $x \geq 1$ yksilöä, niin jokaisen alkuyksilön sukuhaara käyttäytyy toisista sukuhaaroista riippumatta kuten alkutilasta 1 käynnistetty haarautumisprosessi. Näin ollen koko populaatio kuolee sukupuuttoon täsmälleen silloin, kun kaikki erilliset sukuhaarat katkeavat aikanaa, ja voidaan päätellä että

$$\mathbb{P}_x(T_0 < \infty) \;=\; \eta^x,$$

missä $\eta = \mathbb{P}_1(T_0 < \infty)$ on yhden alkuyksilön haarautumisprosessin sukupuuttotodennäköisyys.

Lause 5.10. *Tilasta 1 käynnistyvän haarautumisprosessin sukupuuttotodennäköisyys η on yhtälön*

$$\phi_{Y_1}(s) = s$$

pienin ei-negatiivinen ratkaisu.

Esimerkki 5.11. Populaatiossa jokainen yksilö tuottaa elinaikanaan kaksi jälkeläistä todennäköisyydellä a ja nolla jälkeläistä muuten. Millä todennäköisyydellä erään alkuhetken yksilön jälkikasvu katoaa lopulta sukupuuttoon?

Lisääntymisjakauman todennäköisyydet generoiva funktio on $\phi(s) = (1-a) + as^2$, joten ϕ:n kiintopisteet ovat yhtälön $as^2 - s + (1-a) = 0$ nollakohdat

$$s = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a(1-a)}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(1-2a)^2}}{2a} = \begin{cases} (1-a)/a, \\ 1. \end{cases}$$

Kysytty sukupuuton todennäköisyys on lauseen 5.10 perusteella näin ollen

$$\rho_\infty = \begin{cases} 1, & \text{kun } a \leq 1/2, \\ \frac{1-a}{a}, & \text{kun } a > 1/2. \end{cases}$$

Lauseen 5.10 todistamista varten tarvitaan aputulos, joka kertoo miten haarautumisprosessin hetkittäisten tilajakaumien todennäköisyydet generoivat funktiot voidaan laskea lisääntyvyysjakauman tngf:stä $\phi(s) = \phi_{Y_1}(s)$.

Lemma 5.12. *Alkutilasta 1 käynnistyvän haarautumisprosessin populaation koon generoiva funktio ajanhetkellä $t+1$ toteuttaa*

$$\phi_{X_{t+1}}(s) = \phi_{X_t}(\phi(s)) = \phi(\phi_{X_t}(s)).$$

Todistus. Määritelmän mukaan $X_0 = 1$, joten

$$\phi_{X_0}(s) = s.$$

Sukupolven $t+1$ yksilöt ovat sukupolven t yksilöiden jälkeläisiä, joten sukupolven $t+1$ koko voidaan esittää muodossa

$$X_{t+1} \;=\; \sum_{x=1}^{X_t} Y_{t,x},$$

missä $Y_{t,1}, Y_{t,2}$ ovat keskenään ja X_t:stä riippumattomia lisääntymisjakaumaa p noudattavia satunnaislukuja. Lauseen 5.8 perusteella pätee

$$\phi_{X_{t+1}}(s) = \phi_{X_t}(\phi(s)), \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Sijoittamalla ylläolevaan kaavaan $t = 0$ saadaan $\phi_{X_1}(s) = \phi(s)$. Sijoittamalla ylläolevaan kaavaan $t = 1$ saadaan

$$\phi_{X_2}(s) = \phi_{X_1}(\phi(s)) = \phi(\phi(s)).$$

Näin jatkamalla voidaan todeta, että X_t:n generoiva funktio saadaan saadaan iteroimalla funktiota ϕ peräkkäin t kertaa. Tästä seuraa lemma toinen väittämä. □

Lauseen 5.10 todistus. Merkitään mukavuussyistä $\phi(s) = \phi_{Y_1}(s)$.

(i) Näytetään ensiksi, että η on ϕ:n kiintopiste. Kirjoitetaan η muodossa

$$\eta = \mathbb{P}\left(\bigcup_{t=1}^{\infty}\{X_t = 0\}\right)$$

ja todetaan, että tn-mitan jatkuvuuden nojalla

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{t=1}^{\infty}\{X_t = 0\}\right) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{s=1}^{t}\{X_s = 0\}\right).$$

Yllämainittu jatkuvuusominaisuus seuraa yleisen tn-avaruuden tn-mitan aksioomista; sitä käsitellään tarkemmin todennäköisyysteorian syventävillä kursseilla. Seuraavaksi havaitaan, että

$$\bigcup_{s=1}^{t}\{X_s = 0\} \;=\; \{X_t = 0\},$$

sillä tila 0 on absorboiva. Näin ollen voidaan kirjoittaa

$$\eta = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{s=1}^{t}\{X_s = 0\}\right) = \lim_{t\to\infty} \eta_t,$$

missä $\eta_t = \mathbb{P}(X_t = 0)$.

Generoivia funktioita käyttäen voidaan kirjoittaa

$$\mathbb{P}(X_t = 0) = \phi_{X_t}(0),$$

ja lemman 5.12 avulla

$$\phi_{X_t}(0) = \phi(\phi_{X_{t-1}}(0)).$$

Näin ollen

$$\eta_t = \phi(\eta_{t-1}) \tag{5.11}$$

kaikilla $t \geq 1$. Koska luvut η ja η_t ovat todennäköisyyksiä, kuuluvat ne välille $[0, 1]$ ja ϕ on suppenevana potenssisarjana jatkuva kyseisellä välillä. Näin ollen

$$\eta = \lim_{t\to\infty} \eta_t = \lim_{t\to\infty} \phi(\eta_{t-1}) = \phi(\lim_{t\to\infty} \eta_{t-1}) = \phi(\eta).$$

Näin ollen η on ϕ:n kiintopiste.

(ii) Oletetaan seuraavaksi, että $a \in [0, 1]$ on mielivaltainen ϕ:n kiintopiste ja näytetään, että $\eta \leq a$. Todetaan ensiksi, että koska ϕ on kasvava välillä $[0, 1]$ ja X_1 jakautunut kuten Y_1, niin

$$\eta_1 = \mathbb{P}(X_1 = 0) = \phi(0) \leq \phi(a) = a.$$

Siispä $\eta_1 \leq a$. Toisaalta yhtälön (5.11) ja ϕ:n kasvavuuden avulla

$$\eta_2 = \phi(\eta_1) \leq \phi(a) = a.$$

Siispä myös $\eta_2 \leq a$. Näin jatkaen voidaan päätellä, että $\eta_t \leq a$ kaikilla $t \geq 1$. Näin ollen

$$\eta = \lim_{t\to\infty} \eta_t \leq a.$$

□

5.7.5 Varma sukupuutto

Todetaan vielä lopuksi seuraava perustavalaatuinen tulos. Tässä $m = \mathbb{E}(Y_1)$. Tulos kertoo, että haarautumisprosessi ei voi olla stabiili siinä mielessä, että populaatio pitkällä aikavälillä asettuisi jollekin kestävälle tasolle. Tuloksen mukaan ainoa tapaus, jolloin populaatio ei kuole sukupuuttoon, on $m > 1$, mutta tällöin lauseen 5.9 mukaan prosessi odotusarvoisesti kasvaa kohti ääretöntä eksponentiaalisen nopeasti eli tapahtuu väestöräjähdys. Tällaista tulos voidaan luonnehtia malthusilaiseksi periaatteeksi englantilaisen taloustieteilijän Thomas Malthusin mukaan.

Lause 5.13. *Jokaiselle tilasta 1 käynnistyvälle haarautumisprosessille, jonka lisääntymisjakauma toteuttaa $p(0) > 0$, pätee*

- $\eta = 1$, *kun* $m \leq 1$.
- $\eta \in (0, 1)$, *kun* $m > 1$.

Todistus. Todetaan ensin, että $\phi(1) = 1$ ja lisäksi voidaan näyttää, että ϕ on välillä $[0, 1]$ konveksi funktio. Lisäksi vasemmanpuolinen derivaatta pisteessä 1 toteuttaa $\phi'(1-) = m$. Jos $m \leq 1$, niin luonnostelemalla ϕ:n kuvaaja välille $[0, 1]$ nähdään, että ϕ:llä ei ole kiintopisteitä välillä $[0, 1)$. Näin ollen tällöin pienin ei-negatiivinen kiintopiste on $\eta = 1$.

Jos $m > 1$, niin jälleen luonnnostelemalla ϕ:n kuvaaja välille $[0, 1]$ nähdään, että ϕ:llä on täsmälleen yksi kiintopiste välillä $(0, 1)$. Tämä kiintopiste on pienin ei-negatiivinen, joten $\eta \in (0, 1)$. $\square$

6 Martingaalit ja informaatioprosessit

Martingaali on satunnaisprosessi, jonka paras tulevaisuuden ennuste tiettyyn ajanhetkeen saatavilla olevan informaation suhteen on prosessin nykyarvo. Martingaalit ovat Markov-prosessien rinnalla yksi keskeisimpiä stokastisten prosessien luokkia. Martingaalit ovat keskeisiä taloustieteessä ja erityisesti finanssimalleissa, sillä tehokkailla markkinoilla vaihdettujen arvopapereiden hintojen voidaan perustella olevan martingaaleja. Martingaalit ovat myös arvokkaita teknisiä työkaluja stokastisessa analyysissä ja matemaattisessa tilastotieteessä, sillä niiden avulla voidaan tutkia milloin satunnaisjono, stokastinen integraali tai stokastinen algoritmi suppenee.

6.1 Ehdollinen odotusarvo informaation suhteen

6.1.1 Määritelmä äärellistilaisille satunnaisluvuille

Ehdollista odotusarvoa voi käsitellä eri näkökulmista. Oletetaan aluksi, että X ja Y ovat äärellistilaisia, mahdollisesti toisistaan riippuvia satunnaislukuja. Tällöin

$$\mathbb{E}(Y) \;=\; \sum_y y\,\mathbb{P}(Y=y)$$

on Y:n odotusarvo ulkopuolisen havainnoijan näkökulmasta ja

$$\mathbb{E}(Y\,|\,X=x) \;=\; \sum_y y\,\mathbb{P}(Y=y\,|\,X=x)$$

on Y:n odotusarvo sisäpiiriläisen, joka tietää että $X=x$, näkökulmasta. Kehittyneempien ennustusmallien yhteydessä halutaan myös määritellä ehdollinen odotusarvo

$$\mathbb{E}(Y\,|\,X),$$

jonka voidaan tulkita olevan ulkopuolisen havainnoijan havaitsema arvo sille luvulle, jonka X:n tunteva sisäpiiriläinen odottaa Y:n saavan. Ylläolevan käsitteen kohdalla todetaan, että $\mathbb{E}(Y\,|\,X)$:n arvo riippuu X:n realisaatiosta, jolloin myös $\mathbb{E}(Y\,|\,X)$ on satunnainen. Toisaalta satunnaisluvun $\mathbb{E}(Y\,|\,X)$ kaikki satunnaisuus piilee X:n satunnaisuudessa, joten

$$\mathbb{E}(Y\,|\,X) = h(X)$$

jollain deterministisellä funktiolla h. Tämän funktion arvo pisteessä x on tapahtuman $\{X=x\}$ sattuessa X:n tuntevan sisäpiiriläisen odottama arvo Y:lle, eli

$$h(x) \;=\; \mathbb{E}(Y\,|\,X=x) \;=\; \sum_y y\,\mathbb{P}(Y=y\,|\,X=x). \tag{6.1}$$

Huomaa, että ylläolevaan kaavaan ei voi noin vain sijoittaa satunnaislukua X, sillä yleisesti ottaen

$$h(X) \;\neq\; \mathbb{E}(Y) \;=\; \mathbb{E}(Y\,|\,X=X).$$

Oikea tapa tulkita $h(X)$ on ensin määritellä deterministinen funktio h kaavalla (6.1) ja sen jälkeen määritellä satunnaisluku $h(X)$ kuvauksena $\omega \mapsto h(X(\omega))$ pohjalla olevan todennäköisyysavaruuden $(\Omega, \mathbb{P})$ perusjoukosta reaaliluvuille. Näennäinen ristiriita, joka aiheutuu luvun x korvaamisesta satunnaisluvulla X kaavassa (6.1), johtuu stokastiikan lyhennysmerkinnästä tapahtumalle $\{X = x\}$. Kun muistetaan, että tapahtuma $\{X = x\}$ on todennäköisyysavaruuden perusjoukon osajoukko $\{\omega' \in \Omega : X(\omega') = x\}$, niin satunnaisluvun $h(X)$ realisaatio perusjoukon pisteessä ω voidaan kirjoittaa muodossa

$$h(X(\omega)) \ = \ \mathbb{E}(Y \,|\, \{\omega' : X(\omega') = X(\omega)\}).$$

Tämä käsite kirkastuu tarkastelemalla seuraavaa konkreettista esimerkkiä.

Esimerkki 6.1 (Pokerikädet)**.** Kaksi pelaajaa nostaa kaksi korttia 52 kortin pakasta ja kumpikin katsoo omat korttinsa. Olkoon X_i ässien lukumäärä pelaajan $i = 1, 2$ kädessä. Suoralla kombinatorisella laskulla voidaan tarkistaa, että

$$\mathbb{E}(X_2 \,|\, X_1 = k) \ = \ 2 \cdot \frac{4-k}{50}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Tällöin ulkopuolisen havainnoijan näkökulmasta pelaajan 1 (joka tuntee X_1:n) odottama X_2:n arvo on satunnaisluku

$$\mathbb{E}(X_2 \,|\, X_1) \ = \ 2 \cdot \frac{4 - X_1}{50},$$

pelaajan 2 (joka tuntee X_2:n) odottama X_2:n arvo on satunnaisluku

$$\mathbb{E}(X_2 \,|\, X_2) \ = \ X_2$$

ja kasinon ylläpitäjän (joka ei ole nähnyt kenenkään kortteja) odottama X_2:n arvo on deterministinen luku

$$\mathbb{E}(X_2) \ = \ 2 \cdot \frac{4}{52}.$$

Ehdollinen odotusarvo voidaan määritellä myös vektoriarvoisen informaation suhteen. Olkoot $X_1, \dots, X_n$ ja Y äärellistilaisia, mahdollisesti toisistaan riippuvia satunnaislukuja. Tällöin $\mathbb{E}(Y \,|\, X_1, \dots, X_n)$ on ulkopuolisen havainnoijan havaitsema arvo sille luvulle, jonka satunnaisvektorin $X = (X_1, \dots, X_n)$ tunteva sisäpiiriläinen odottaa Y:n saavan. Tämä käsite määritellään samaan tapaan kuin yhdenkin ehdollistavan satunnaisluvun tapauksessa muodossa

$$\mathbb{E}(\,Y \,|\, X_1, \dots, X_n) \ = \ h(X_1, \dots, X_n),$$

missä deterministinen funktio h määritellään kaavalla

$$h(x) = \mathbb{E}(Y \,|\, X = x)$$

niille $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ joille $\mathbb{P}(X = x) > 0$.

6.1.2 Laskusääntöjä

Tässä kappaleessa tutustutaan informaation suhteen määritellyn ehdollisen odotusarvon tärkeimpiin laskusääntöihin. Aluksi oletamme, että kaikki satunnaismuuttujat saavat arvoja äärellisessä tilajoukossa. Informaation käsitteen analysoimiseksi otetaan käyttöön lyhennysmerkintä $Z \in \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, jos $Z = h(X_1, \ldots, X_n)$ jollain deterministisellä funktiolla h.

Esimerkki 6.2. Heitetään kahta noppaa ja olkoon X_i nopan $i = 1, 2$ silmäluku. Merkitään $Z_1 = X_1+X_2$ ja $Z_2 = X_1-X_2$. Tällöin selvästikin $Z_1, Z_2 \in \sigma(X_1, X_2)$. Lisäksi $f(Z_1, Z_2) \in \sigma(X_1, X_2)$ jokaisella deterministisellä funktiolla $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$. Toisaalta $X_2 \in \sigma(X_1, Z_1)$ mutta $X_2 \notin \sigma(X_1)$.

Lause 6.3. *Äärellisen tilajoukon satunnaisluvuille (ja yleisemmin lauseen 6.6 ehdoin) pätee seuraavat laskusäännöt.*

(i) Harhattomuus:
$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \mid X_1, \ldots, X_n)) \; = \; \mathbb{E}(Y). \tag{6.2}$$

(ii) Tunnetun arvon ulosveto:
$$\mathbb{E}(ZY \mid X_1, \ldots, X_n) \; = \; Z\, \mathbb{E}(Y \mid X_1, \ldots, X_n) \tag{6.3}$$
kaikilla $Z \in \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

(iii) Riippumattoman informaation huomiotta jättäminen:
$$\mathbb{E}(Y \mid X_1, \ldots, X_n) \; = \; \mathbb{E}(Y) \tag{6.4}$$
aina kun Y ja $(X_1, \ldots, X_n)$ ovat riippumattomat.

(iv) Päällekkäisen informaation huomiotta jättäminen:
$$\mathbb{E}(Y \mid X_1, \ldots, X_n, X_1', \ldots, X_n') \; = \; \mathbb{E}(Y \mid X_1, \ldots, X_n) \tag{6.5}$$
aina kun $X_1', \ldots, X_n' \in \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

Todistus. Merkitään symbolilla $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbb{P}(X = x) > 0\}$ satunnaisvektorin $X = (X_1, \ldots, X_n)$ mahdollisten arvojen joukkoa ja määritellään
$$h(x) = \mathbb{E}(Y \mid X = x), \quad x \in S.$$

(i) Kaikilla $x \in S$ pätee
$$h(x) \; = \; \sum_y y \, \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)}.$$

Näin siis

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \,|\, X)) = \mathbb{E}h(X) &= \sum_{x\in S} h(x)\,\mathbb{P}(X=x) \\ &= \sum_{x\in S}\sum_{y} y\,\mathbb{P}(X=x, Y=y) \\ &= \sum_{y} y\,\mathbb{P}(Y=y) = \mathbb{E}(Y).\end{aligned}$$

(ii) Jos $Z \in \sigma(X_1,\dots,X_n)$, niin $Z = \phi(X)$ jollain deterministisellä funktiolla $\phi(x)$. Tällöin kaikilla $x \in S$,

$$\tilde{h}(x) \;=\; \mathbb{E}(ZY \,|\, X=x) \;=\; \phi(x)\mathbb{E}(Y \,|\, X=x) \;=\; \phi(x)h(x),$$

joten

$$\mathbb{E}(ZY \,|\, X) \;=\; \tilde{h}(X) \;=\; \phi(X)h(X) \;=\; Z\,\mathbb{E}(Y \,|\, X).$$

(iii) Kun X ja Y ovat riippumattomat, niin kaikilla $x \in S$ pätee

$$h(x) \;=\; \sum_{y} y\mathbb{P}(Y=y \,|\, X=x) \;=\; \sum_{y} y\mathbb{P}(Y=y) \;=\; \mathbb{E}(Y).$$

Näin siis $\mathbb{E}(Y \,|\, X) = h(X) = \mathbb{E}(Y)$.

(iv) Merkitään $X' = (X_1',\dots,X_n')$. Tällöin $X' = \phi(X)$ jollain deterministisellä funktiolla ϕ ja satunnaisvektorin (X,X') mahdollisten arvojen joukko voidaan kirjoittaa muodossa $\tilde{S} = \{(x,\phi(x)) : \mathbb{P}(X=x) > 0\}$. Lisäksi kaikilla $(x,x') \in \tilde{S}$

$$\tilde{h}(x,x') \;=\; \mathbb{E}(Y \,|\, X=x, X'=x') \;=\; \mathbb{E}(Y \,|\, X=x) \;=\; h(x).$$

Näin ollen

$$\mathbb{E}(Y \,|\, X, X') \;=\; h(X,X') \;=\; h(X) \;=\; \mathbb{E}(Y \,|\, X).$$

□

6.1.3 Yleinen määritelmä

Ehdollisen odotusarvon määritteleminen ylinumeroituvassa tilajoukossa määritellyn satunnaisluvun tai -vektorin suhteen ei ole aivan helppoa, sillä funktiota $h(x) = \mathbb{E}(Y \,|\, X=x)$ ei tällöin voida määritellä kaavalla (6.1). Yleispätevän määritelmän kehittämiseksi perustellaan ensin seuraava kaavan (6.2) yleistys.

Lemma 6.4 (Ehdollinen harhattomuus)**.** *Jokaiselle äärellisen tilajoukon satunnaisluvulle Y ja satunnaisvektorille X satunnaisluku $\hat{Y} = \mathbb{E}(Y|X)$ toteuttaa*

$$\mathbb{E}(\hat{Y} \,|\, X \in A) \;=\; \mathbb{E}(Y \,|\, X \in A)$$

kaikilla A s.e. $\mathbb{P}(X \in A) > 0$.

Todistus. Indikaattorimuuttujalle $Z = 1(X \in A) \in \sigma(X)$ pätee kaavojen (6.3) ja (6.2) mukaan

$$\mathbb{E}(\hat{Y}Z) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \mid X)Z) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(YZ \mid X)) = \mathbb{E}(YZ),$$

joten

$$\mathbb{E}(\hat{Y} \mid X \in A) \;=\; \frac{\mathbb{E}(\hat{Y}1(X \in A))}{\mathbb{P}(X \in A)} \;=\; \frac{\mathbb{E}(\hat{Y}Z)}{\mathbb{P}(X \in A)} \;=\; \frac{\mathbb{E}(YZ)}{\mathbb{P}(X \in A)} \;=\; \mathbb{E}(Y| \, X \in A).$$

□

Venäläismatemaatikko Andrei Kolmogorov (1903–1987) esitteli vuonna 1933 ehdolliseen harhattomuuteen perustuvan ehdollisen odotusarvon määritelmän, joka toimii mielivaltaisille $\mathbb{R}^n$-arvoisille satunnaisvektoreille $X = (X_1, \dots, X_n)$ ja sitäkin yleisemmille satunnaismuuttujille.

Lause 6.5. *Jos $\mathbb{E}|Y| < \infty$, on olemassa (todennäköisyydellä 1) yksikäsitteinen satunnaisluku $\hat{Y} \in \sigma(X_1, \dots, X_n)$ s.e. $\mathbb{E}|\hat{Y}| < \infty$ ja*

$$\mathbb{E}(\hat{Y} \mid X \in A) \;=\; \mathbb{E}(Y \mid X \in A)$$

kaikilla $A \subset \mathbb{R}^n$ s.e. $\mathbb{P}(X \in A) > 0$.

Ylläolevan lauseen todistus [Wil91, lause 9.2] vaatii analyyttisiä pohjatietoja, joita käsitellään todennäköisyysteorian ja analyysin jatkokursseilla. Lauseen 6.5 ehdot toteuttavan satunnaisluvun Y ehdollinen odotusarvo informaation $(X_1 \dots, X_n)$ suhteen määritellään lauseessa esiintyvänä satunnaislukuna

$$\mathbb{E}(Y \mid X_1, \dots, X_n) \;=\; \hat{Y}.$$

Lause ei anna yleistä suljetun muodon lauseketta satunnaisluvulle $\hat{Y}$. Tämä ei kuitenkaan yleensä haittaa, sillä sovelluksissa voidaan usein suoraan päätellä ehdollisen odotusarvon funktionaalinen muoto. Teorian kannalta puolestaan riittää hallita ehdollisen odotusarvon laskusäännöt, jotka tiivistetään seuraavaksi [Wil91, lause 9.7]. Satunnaisluku Y on *integroituva*, jos $\mathbb{E}|Y| < \infty$.

Lause 6.6. *Kun satunnaisluvut Y, Y_n, Z, YZ ovat integroituvia, niiden ehdollisille odotusarvoille pätee lauseen 6.3 ominaisuudet ja lisäksi:*

- *Ehdollinen harhattomuus:* $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X_1, X_2)|X_1) = \mathbb{E}(Y|X_1)$.
- *Ehdollinen riippumattoman informaation huomiotta jättäminen:* $\mathbb{E}(Y|X_1, X_2) = \mathbb{E}(Y|X_1)$ *kaikilla* $X_2 \perp\!\!\!\perp (X_1, Y)$
- *Lineaarisuus:* $\mathbb{E}(a_1Y_1 + a_2Y_2 \mid X) = a_1\mathbb{E}(Y_1|X) + a_2\mathbb{E}(Y_2|X)$.
- *Monotonisuus:* $Y_1 \le Y_2 \implies \mathbb{E}(Y_1|X) \le \mathbb{E}(Y_2|X)$.

- *Monotoninen jatkuvuus: Jokaiselle kasvavalle satunnaisjonolle* $0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq Y_3 \leq \cdots$ *pätee*

$$Y_n \to Y \implies \mathbb{E}(Y_n|X) \to \mathbb{E}(Y|X).$$

- *Alisteinen jatkuvuus: Jokaiselle integroituvalla satunnaisluvulla rajoitetulle satunnaisjonolle* $|Y_n| \leq Z$, $\mathbb{E}Z < \infty$ *pätee*

$$Y_n \to Y \implies \mathbb{E}(Y_n|X) \to \mathbb{E}(Y|X).$$

6.2 Martingaalit

Satunnaisjono $(M_0, M_1, \dots)$ on satunnaisjonon $(X_0, X_1, \dots)$ suhteen *martingaali*, jos

(i) $\mathbb{E}|M_t| < \infty$,

(ii) $M_t \in \sigma(X_0, \dots, X_t)$, ja

(iii) $\mathbb{E}(M_{t+1} \,|\, X_0, \dots, X_t) = M_t$.

Ehdot (i) ja (ii) toteuttava satunnaisjono (M_t) on *alimartingaali*, jos

(iii)' $\mathbb{E}(M_{t+1} \,|\, X_0, \dots, X_t) \geq M_t$.

ja *ylimartingaali*, jos

(iii)" $\mathbb{E}(M_{t+1} \,|\, X_0, \dots, X_t) \leq M_t$.

Ominaisuus (i) on tekninen ehto, joka takaa että odotusarvot ja ehdolliset odotusarvot on hyvin määritelty. Ominaisuus (ii) puolestaan tarkoittaa, että martingaalin tila ajanhetkellä t voidaan määrittää deterministisenä funktiona informaation $(X_0, X_1, \dots, X_t)$ pohjalta. Varsinainen martingaaliominaisuus (iii) tarkoittaa, että ajanhetkellä t informaation $(X_0, X_1, \dots, X_t)$, ja näin ollen myös arvon M_t, tuntevan havainnoijan odottama arvo martingaalin seuraavalle ajanhetkelle on sama kuin martingaalin nykyarvo. Näin ollen martingaali on luonnollinen malli tehokkailla markkinoilla vaihdettavien sijoituskohteiden hinnoille: sijoituskohteen huomisen päivän odotettu arvo M_{t+1} nykypäivään asti saatavilla olevan markkinadatan $(X_0, \dots, X_t)$ valossa on sama kuin sijoituskohteen nykyarvo M_t.

Esimerkki 6.7 (Satunnaiskulku)**.** Olkoon $S_t = S_0 + X_1 + \cdots + X_t$, missä $\mathbb{E}|S_0| < \infty$ ja $X_1, X_2, \dots$ ovat samoin jakautuneita sekä toisistaan ja alkutilasta S_0 riippumattomia satunnaislukuja odotusarvonaan m. Tällöin

$$\mathbb{E}|S_t| \;\leq\; \mathbb{E}|S_0| + t\mathbb{E}|X_1| \;<\; \infty$$

ja $S_t \in \sigma(S_0, X_1, \dots, X_t)$ kaikilla $t \geq 0$. Lisäksi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_{t+1} \,|\, S_0, X_1, \dots, X_t) &= \mathbb{E}(S_t + X_{t+1} \,|\, S_0, X_1, \dots, X_t) \\
&= \mathbb{E}(S_t \,|\, S_0, X_1, \dots, X_t) + \mathbb{E}(X_{t+1} \,|\, S_0, X_1, \dots, X_t) \\
&= S_t + \mathbb{E}(X_{t+1}) \\
&= S_t + m.
\end{aligned}$$

Tästä nähdään, että satunnaiskulku (S_t) on informaatiojonon $(S_0, X_1, X_2, \dots)$ suhteen

$$\begin{cases} \text{ylimartingaali,} & \text{kun} \;\; m < 0, \\ \text{martingaali,} & \text{kun} \;\; m = 0, \\ \text{alimartingaali,} & \text{kun} \;\; m > 0. \end{cases}$$

Lukijalle harjoitustehtäväksi jätetään tarkistaa, että keskitetty satunnaiskulku $t \mapsto S_t - mt$ on martingaali kaikilla m.

Esimerkki 6.8 (Ennustusmartingaali)**.** Jos Z on jokin integroituva satunnaisluku ja $(X_0, X_1, \dots)$ jokin satunnaisjono, niin ulkopuolisen havainnoijan näkökulmasta satunnaisjonon arvot ajanhetkeen t asti tuntevan sisäpiiriläisen odottama Z:n arvo on

$$M_t \;=\; \mathbb{E}(Z \,|\, X_0, \dots, X_t).$$

Ehdollisen odotusarvon harhattomuuden perusteella $\mathbb{E}|M_t| \leq \mathbb{E}|Z| < \infty$. Ehdollisen odotusarvon määritelmän mukaan M_t voidaan lausua deterministisenä funktiona satunnaisvektorista $X_{0:t} = (X_0, \dots, X_t)$, joten $M_t \in \sigma(X_0, \dots, X_t)$. Ehdollista harhattomuutta (lause 6.6) käyttämällä puolestaan nähdään, että

$$\mathbb{E}(M_{t+1} \,|\, X_{0:t}) \;=\; \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z \,|\, X_{0:(t+1)}) \,|\, X_{0:t}) \;=\; \mathbb{E}(Z \,|\, X_{0:t}) \;=\; M_t.$$

Näin ollen $(M_0, M_1, \dots)$ on martingaali. Tätä prosessia kutsutaan satunnaisluvun Z:n *ennustusmartingaaliksi.*

6.3 Martingaalien ominaisuuksia

Usein on tapana sanoa, että (M_t) on martingaali ottamatta kantaa taustalla olevaan informaatioprosessiin. Tällöin tarkoitetaan, että (M_t) on martingaali itsensä suhteen, eli kaikilla $t \geq 0$ pätee $\mathbb{E}|M_t| < \infty$,

$$\mathbb{E}(M_{t+1} \,|\, M_0, \dots, M_t) \;=\; M_t,$$

ja triviaalisti $M_t \in \sigma(M_0, \dots, M_t)$. Seuraava tulos kuvastaa informaatioprosessin luonnetta martingaalin käsitteessä. Tulokseen tutustumisen jälken on hyvä harjoitustehtävä keksiä esimerkki informaatioprosessista, jonka suhteen jokin itsensä suhteen oleva martingaali ei enää ole martingaali.

Lause 6.9. *Jos $(M_0, M_1, \dots)$ on martingaali jonkin satunnaisjonon $(X_0, X_1, \dots)$ suhteen, on se myös martingaali itsensä suhteen.*

Todistus. Lauseen oletuksen voimassa ollessa selvästikin $\mathbb{E}|M_t| < \infty$ kaikilla t. Lisäksi triviaalisti $M_t \in \sigma(M_0, \dots, M_t)$. Merkitsemällä $M_{0:t} = (M_0, \dots, M_t)$ ja $X_{0:t} = (X_0, \dots, X_t)$ havaitaan ehdollista harhattomuutta (lause 6.6) käyttämällä, että

$$\mathbb{E}(M_{t+1} \,|\, M_{0:t}) \;=\; \mathbb{E}(\,\mathbb{E}(M_{t+1} \,|\, X_{0:t}, M_{0:t}) \,|\, M_{0:t}).$$

Koska $M_{0:t} \in \sigma(X_{0:t})$, seuraa puolestaan päällekkäisen informaation poisjättämisestä (lause 6.3) ja martingaaliominaisuudesta, että

$$\mathbb{E}(M_{t+1} \,|\, X_{0:t}, M_{0:t}) \;=\; \mathbb{E}(M_{t+1} \,|\, X_{0:t}) \;=\; M_t.$$

Yhdistämällä ylläolevat kaksi kaavaa havaitaan, että

$$\mathbb{E}(M_{t+1} \,|\, M_{0:t}) \;=\; \mathbb{E}(M_t \,|\, M_{0:t}) \;=\; M_t.$$

□

Seuraava perustulos kuvastaa martingaalien odotusarvoista kehitystä.

Lause 6.10. *Kuvaus $t \mapsto \mathbb{E}(M_t)$ on*[7]

$$\begin{cases} \textit{kasvava}, & \textit{kun } (M_t) \textit{ on alimartingaali}, \\ \textit{vakio}, & \textit{kun } (M_t) \textit{ on martingaali}, \\ \textit{vähenevä}, & \textit{kun } (M_t) \textit{ on ylimartingaali}. \end{cases}$$

Todistus. Jos (M_t) on alimartingaali informaatioprosessin (X_t) suhteen, niin

$$\mathbb{E}(M_{t+1}|X_0, \dots, X_t) \;\ge\; M_t.$$

Ehdollisen odotusarvon harhattomuutta ja monotonisuutta käyttämällä tästä nähdään, että

$$\mathbb{E}(M_{t+1}) \;=\; \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_{t+1} \,|\, X_0, \dots, X_t)) \;\ge\; \mathbb{E}(M_t).$$

Martingaalille ja ylimartingaalille vastaava tulos saadaan samaan tapaan. □

Vaikka martingaalin odotusarvo ei lauseen 6.10 mukaan muutu ajan kuluessa, martingaalin tilastollinen käyttytyminen voi silti muuttua merkittävästikin.

Esimerkki 6.11 (Satunnaiskulku)**.** Esimerkin 6.7 satunnaiskulku

$$S_t = S_0 + X_1 + \cdots X_t$$

on martingaali, kun $m = \mathbb{E}(X_1) = 0$. Toisaalta S_t:n varianssille pätee

$$\mathrm{Var}(S_t) = \mathrm{Var}(S_0) + \sigma^2 t,$$

missä $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. Kun $\sigma^2 > 0$, nähdään että S_t:n odotettu satunnaisvaihtelu kasvaa pitkällä aikavälillä kohti ääretöntä.

[7] Tässä luentomonisteessa funktio on *kasvava*, kun $s \le t \implies f(s) \le f(t)$ ja *aidosti kasvava*, kun $s < t \implies f(s) < f(t)$.

6.4 Martingaalin pitkän aikanvälin käyttäytyminen

Martingaalien pitkän aikavälin käyttäytymistä kuvaavat seuraavat kaksi tärkeää tulosta. Niiden todistukset [Wil91, 11.7,14.1] vaativat syvällisempää todennäköisyysteorian tuntemusta, jota ei ehditä tässä monisteessa käsitellä.

Lause 6.12. *Jokainen ei-negatiivinen martingaali ja ylimartingaali suppenee todennäköisyydellä yksi kohti jotain äärellistä satunnaislukua.*

Positiivisia ja negatiivisia arvoja saava martingaali ei välttämättä suppene pitkällä aikavälillä. Esimerkin 6.11 martingaali ei voi supeta, koska sen varianssi kasvaa äärettömäksi. Martingaalit, joiden satunnaisvaihtelu on sopivalla tavalla rajoitettua, kuitenkin suppenevat. Tässä yhteydessä tarkka ehto satunnaisvaihtelun rajoittuneisuudelle on tasaintegoituvuus. Satunnaisjono (M_t) on *tasaintegroituva*, jos mielivaltaista $\epsilon > 0$ kohden on olemassa luku $K > 0$ siten, että

$$\mathbb{E}(|M_t| 1(|M_t| > K)) \;\leq\; \epsilon$$

kaikilla $t \geq 0$. Moniin käytännön tilanteisiin sopiva riittävä ehto tasaintegroituvuuden varmistamiseen on tarkistaa, että jollain vakioilla $c > 0$ ja $p > 1$ pätee $\mathbb{E}(|M_t|^p) \leq c$ kaikilla $t \geq 0$.

Lause 6.13. *Jokainen tasaintegroituva satunnaisjono (M_t), joka on martingaali satunnaisjonon $(X_0, X_1, \dots)$ suhteen, suppenee todennäköisyydellä yksi kohti äärellistä integroituvaa satunnaislukua M_∞. Lisäksi pätee*

$$M_t \;=\; \mathbb{E}(M_\infty \,|\, X_0, \dots, X_t).$$

Ylläolevasta tuloksesta huomataan, että jokainen tasaintegroituva martingaali voidaan esittää integroituvan satunnaisluvun ennustusmartingaalina (ks. esimerkki 6.8).

6.5 Martingaalit ja Markov-ketjut

Olkoon $(X_0, X_1, \dots)$ siirtymämatriisin P mukaan etenevä numeroituvan tilajoukon S Markov-ketju ja $f : S \to \mathbb{R}$ jokin tilajoukon funktio, esimerkiksi jonkin stokastisen mallin kustannusfunktio. Tällöin voidaan kysyä, onko $M_t = f(X_t)$ martingaali. Tarkastellaan tätä seuraavaksi.

Ylläolevaa kysymystä voidaan katsoa yleisemmässä kontekstissa, missä kustannusfunktio voi riippua myös ajasta. Tarkastellaan satunnaisprosessia $M_t = f_t(X_t)$, missä $f_0, f_1, \dots$ ovat funktioita tilajoukosta S reaaliluvuille. Ehdolla $X_t = x$ saadaan satunnaisluvun $M_{t+1} = f_{t+1}(X_{t+1})$ odotusarvo kaavasta

$$\mathbb{E}(M_{t+1} \,|\, X_t = x) \;=\; \sum_y \mathbb{P}(X_{t+1} = y | X_t = x) f_{t+1}(y) \;=\; \sum_y P(x,y) f_{t+1}(y).$$

Kun kuvaus $x \mapsto \sum_y P(x,y) f_{t+1}(y)$ tulkitaan neliömatriisin ja pystyvektorin tulona $P f_{t+1}$, voidaan ylläoleva havainto kirjoittaa muodossa

$$\mathbb{E}(M_{t+1} \,|\, X_t = x) \;=\; P f_{t+1}(x).$$

Markov-ominaisuuden perusteella ylläoleva odotusarvo ei riipu ketjun aiemmista tiloista, joten

$$\mathbb{E}(M_{t+1}\,|\,X_0,\dots,X_t) \;=\; \mathbb{E}(M_{t+1}\,|\,X_t) \;=\; Pf_{t+1}(M_t).$$

Lause 6.14. *Oletetaan, että $\sum_y P(x,y)|f_t(y)| < \infty$ kaikilla $x \in S$ ja $t = 0,1,\dots$ Tällöin satunnaisprosessi $M_t = f_t(X_t)$ on ketjun (X_t) suhteen*

$$\begin{cases} \textit{ylimartingaali}, & \textit{jos } Pf_{t+1} \le f_t, \\ \textit{martingaali}, & \textit{jos } Pf_{t+1} = f_t, \\ \textit{alimartingaali}, & \textit{jos } Pf_{t+1} \ge f_t. \end{cases}$$

Kun funktio $f_t(x) = f(x)$ ei riipu ajasta ja Markov-ketjun *keskivirtausta* funktion f suhteen merkitään

$$Df(x) \;=\; Pf(x) - f(x) \;=\; \sum_y P(x,y)(f(y) - f(x)),$$

voidaan ylläoleva tulos kirjoittaa seuraavassa muodossa. Jos $\sum_y P(x,y)|f(y)| < \infty$ kaikilla $x \in S$, niin satunnaisprosessi $M_t = f_t(X_t)$ on ketjun suhteen

$$\begin{cases} \text{ylimartingaali}, & \text{jos } Df(x) \le 0 \text{ kaikilla } x, \\ \text{martingaali}, & \text{jos } Df(x) = 0 \text{ kaikilla } x, \\ \text{alimartingaali}, & \text{jos } Df(x) \ge 0 \text{ kaikilla } x. \end{cases}$$

Lauseen seurauksena voidaan todeta, että äärellisen tilajoukon $S \subset \mathbb{R}$ Markov-ketju on martingaali oman informaationsa suhteen täsmälleen silloin, kun

$$\sum_y y\,P(x,y) = x \quad \text{kaikilla } x.$$

Esimerkki 6.15 (Uhkapeli vakiopanoksella)**.** Kasinon uhkapelissä jokainen pelikierros tuottaa euron voittoa ($X_t = +1$) tn:llä p ja euron tappiota ($X_t = -1$) muuten. Tällaista peliä rajattomasti (mahdollisesti velaksi) pelaavan henkilön varallisuus t:n pelikierroksen jälkeen on

$$S_t = S_0 + X_1 + \cdots + X_t,$$

missä $S_0 = 100$ on pelurin alkuvarallisuus ja $X_1, X_2, \dots$ ovat riippumattomia s.e. $X_t = +1$ tn:llä p ja $X_t = -1$ tn:llä $q = 1 - p$. Valitaan jokin parametri $r > 0$ ja merkitään $M_t = r^{S_t}$, joka voidaan tulkita varallisuuden diskontattuna arvona. Onko M_t martingaali?

Varallisuusprosessi $(S_0, S_1, \dots)$ on lukujoukon $\mathbb{Z}$ Markov-ketju, jonka siirtymämatriisille pätee $P(x, x+1) = p$ ja $P(x, x-1) = q$ kaikilla $x \in \mathbb{Z}$. Lasketaan funktion $f(x) = r^x$ keskivirtaus Markov-ketjun (S_t) suhteen. Tämä saadaan kaavasta

$$Df(x) \;=\; \sum_{y=-\infty}^{\infty} P(x,y)\,(r^y - r^x) \;=\; p(r^{x+1} - r^x) + q(r^{x-1} - r^x).$$

Kun $r = q/p$ seuraa tästä, että $Df(x) = 0$ kaikilla x, joten lauseen 6.14 mukaan $(q/p)^{S_t}$ on martingaali. (Huom: Myös prosessi $S_t - (p-q)t$ on martingaali esimerkin 6.7 mukaan).

Esimerkki 6.16 (Normalisoitu haarautumisprosessi)**.** Olkoon $(X_0, X_1, \dots)$ haarautumisprosessi, jonka lisääntymisjakauma on $p = (p(0), p(1), \dots)$ ja yksilön tuottamien jälkeläisten odotettu lukumäärä on $m = \sum_{x=0}^{\infty} xp(x) < \infty$. Onko normalisoitu prosessi $M_t = r^{-t}X_t$ martingaali jollain sopivasti valitulla $r > 0$?

Normalisoitu prosessi voidaan esittää muodossa $M_t = f_t(X_t)$, missä $f_t(x) = r^{-t}x$. Lauseen 5.9 perusteella ehdolliselle odotusarvolle pätee

$$\mathbb{E}_x(X_1) \;=\; \mathbb{E}(X_1 \,|\, X_0 = x) \;=\; mx,$$

joten

$$Pf_{t+1}(x) \;=\; \mathbb{E}_x(f_{t+1}(X_1)) \;=\; \mathbb{E}_x(r^{-t-1}X_1) \;=\; r^{-t-1}mx \;=\; (m/r)f_t(x).$$

Valitsemalla $r = m$ pätee siis $Pf_{t+1}(x) = f_t(x)$ kaikilla $x \in S$ ja $t \geq 0$, joten lauseen 6.14 perusteella prosessi $M_t = m^{-t}X_t$ on martingaali informaation $(X_0, X_1, \dots)$ suhteen. Koska martingaali (M_t) on ei-negatiivinen, lauseen 6.12 perusteella on olemassa äärellinen satunnaisluku Z, jolle todennäköisyydellä yksi

$$Z = \lim_{t\to\infty} m^{-t}X_t.$$

Tämän mukaan haarautumisprosessin populaatio voidaan approksimatiivisesti kirjoittaa muodossa

$$X_t \approx Zm^t.$$

Tapauksessa $m \leq 1$ populaatio varmuudella kuolee sukupuuttoon, joten $Z = 0$ todennäköisyydellä yksi. Tapauksessa $m > 1$ populaatio kuolee sukupuuttoon todennäköisyydellä $\eta \in (0, 1)$, joten ylläolevan tuloksen valossa $\eta = \mathbb{P}(Z = 0)$. Erityisesti voidaan nyt todeta, että tapahtuman $\{Z > 0\}$ vallitessa (eli silloin kun sukupuuttoa ei tapahdu) populaatio kasvaa kohti ääretöntä eksponentiaalisen nopeasti.

7 Pysäytetyt martingaalit ja uhkapelit

Uhkapelien terminologiassa *martingaaliksi* kutsutaan panostusstrategiaa, jossa tappiollisen pelikierroksen jälkeen panos aina tuplataan. Tässä luvussa opitaan analysoimaan erilaisia panostusstrategioita martingaalien ja satunnaisten valintahetkien avulla.

7.1 Uhkapeli yksikköpanoksella

Kertynyt tuotto t:ltä pelikierrokselta yksikköpanoksella pelattaessa voidaan kirjoittaa muodossa

$$M_t = \sum_{s=1}^{t} X_s \qquad (M_0 = 0),$$

missä X_s on kierroksen s tuotto, odotusarvonaan $m = \mathbb{E}(X_s)$. Kun oletetaan, että pelikierrosten tuotot ovat toisistaan riippumattomat ja samoin jakautuneet, niin (M_t) on lukujoukon $\mathbb{Z}$ satunnaiskulku. Esimerkin 6.7 mukaan (M_t) on informaatioprosessin $(M_0, X_1, X_2, \dots)$ suhteen

$$\begin{cases} \text{ylimartingaali}, & \text{kun} \quad m \le 0, \\ \text{martingaali}, & \text{kun} \quad m = 0, \\ \text{alimartingaali}, & \text{kun} \quad m \ge 0. \end{cases}$$

Esimerkki 7.1. RAY:n ruletissa punaiselle panostaminen tuottaa

$$X_s = \begin{cases} +1 & \text{tn:llä } 18/37, \\ -1 & \text{tn:llä } 19/37, \end{cases} \qquad m = -1/37,$$

ja yhdelle numerolle panostaminen tuottaa

$$X_s = \begin{cases} +31 & \text{tn:llä } 1/37, \\ -1 & \text{tn:llä } 36/37, \end{cases} \qquad m = -5/37.$$

Molempien pelien odotettu tuotto yksikköpanosta kohden on negatiivinen, joten niitä vastaavat yksikkötuottoprosessit ovat ylimartingaaleja.

Lauseen 6.10 mukaan odotettu kertynyt tuotto $t \mapsto M_t$ on epäsuotuisassa pelissä (ylimartingaali) vähenevä ja reilussa pelissä (martingaali) vakio. Näin ollen epäsuotuista pelistä ei ole odotettavissa positiivista tuottoa vakiopanoksella pelattaessa. Kysymys kuuluukin, onko fiksulla adaptiivisella pelistrategialla mahdollista saavuttaa positiivinen tuotto?

7.2 Tuplausstrategia

Tuplausstrategiassa, jota klassisten uhkapelien terminologiassa myös kutsutaan martingaaliksi, tappiollisen pelikierroksen jälkeen panos aina tuplataan. Näin jatketaan niin kauan, kunnes pelaaja voittaa tavoittelemansa rahasumman tai pelaajan rahat (tai kasinon luotonantohalukkuus) loppuvat.

Tarkastellaan aluksi uhkapeliä, joka voitollisella kierroksella tuottaa jokaista panostettua euroa kohden joko yhden euron voittoa tai yhden euron tappiota. Esimerkki tällaisesta tilanteesta on ruletti, kun panostetaan punaiselle värille. Panostaessaan punaiselle värille 3 EUR pelaaja voittaa 3 EUR, jos ruletin kuula päätyy punaiseen ruutuun, ja häviää 3 EUR muussa tapauksessa. Taulukossa 4 on esitetty, miten tuplausstrategiaa noudattavan pelaajan nettotuotto käyttäytyy ajan suhteen skenaariossa, jossa neljä ensimmäistä kierrosta on tappiollisia ja viides voitollinen. Pelaajan alkupanos on 1 EUR.

t	1	2	3	4	5
Kierroksen t panos (EUR)	1	2	4	8	16
Kierroksen t tulos ('V' = voitto, 'T' = tappio)	T	T	T	T	V
Kierroksen t tuotto (EUR)	-1	-2	-4	-8	+16
Kertynyt nettotuotto t:tä kierrokselta (EUR)	-1	-3	-7	-15	+1

Taulukko 4: Uhkapelin mahdollinen viiden kierroksen realisaatio.

Edellä tehty havainto voidaan yleistää seuraavasti. Jos voitollista kierrosta edeltää t tappiollista kierrosta, niin ensimmäisten t:n kierroksen aikana pelaaja ensin häviää $1 + 2 + \cdots + 2^{t-1}$ euroa ja sen jälkeen voittaa 2^t euroa pelikierroksella t. Näin ollen alkuvarallisuudella W_0 aloittavan pelaajan varallisuus pelikierroksen $t + 1$ päätyttyä on

$$W_{t+1} \;=\; W_0 - (1 + 2 + \cdots + 2^{t-1}) + 2^t \;=\; W_0 - \frac{2^t - 1}{2 - 1} + 2^t \;=\; W_0 + 1.$$

Voidaan siis todeta, että tuplausstrategiaa uskollisesti noudattava pelaaja varmuudella päätyy yhden euron voitolle ensimmäisen voitollisen pelikierroksen tapahduttua. Huomaa, että tässä analyysissä ei tehty mitään oletuksia pelikierrosten todennäköisyyksistä. Ainoa oleellinen stokastinen vaatimus on, että voitollinen pelikierros varmuudella tapahtuu jonain ajanhetkenä. Allaolevan lauseen 7.2 mukaan riittävä ehto tälle on olettaa, että pelikierrokset ovat toisistaan riippumattomat ja että kullakin kierroksella on mahdollista voittaa vähintään todennäköisyydellä $\epsilon > 0$.

Lause 7.2. *Olkoon $(X_0, X_1, \dots)$ jono riippumattomia tilajoukon $\{0, 1\}$ satunnaismuuttujia, joille $\mathbb{P}(X_t = 1) \ge \epsilon > 0$ kaikilla $t \ge 0$. Tällöin*

$$\mathbb{P}(X_t = 1 \textit{ jollain } t \ge 0) = 1.$$

Todistus. Olkoon $T = \min\{t \geq 0 : X_t = 1\} \in [0, \infty]$ satunnaisjonon ensimmäinen osumahetki tilaan 1. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > t) &= \mathbb{P}(X_0 = 0, \ldots, X_t = 0) \\ &= \mathbb{P}(X_0 = 0) \cdots \mathbb{P}(X_t = 0) \\ &\leq (1 - \epsilon)^{t+1}.\end{aligned}$$

Kun $\epsilon > 0$, tästä seuraa todennäköisyysmitan monotonisen jatkuvuuden perusteella, että

$$\mathbb{P}(T = \infty) = \mathbb{P}(\cap_{t=0}^{\infty}\{T > t\}) = \lim_{t \to \infty} \mathbb{P}(T > t) \leq \lim_{t \to \infty} (1 - \epsilon)^{t+1} = 0.$$

Näin ollen

$$\mathbb{P}(X_t = 1 \text{ jollain } t \geq 0) = \mathbb{P}(T < \infty) = 1.$$

□

Jos uhkapelin ensimmäisen voitollisen kierroksen ajankohtaa merkitään satunnaisluvulla T, on edellämainittujen oletusten vallitsessa $T < \infty$ todennäköisyydellä yksi. Lisäksi havaittiin, että yhden euron alkupanoksella aloittavan pelaajan nettotuotto ensimmäisen voitollisen pelikierroksen jälkeen on $W_T - W_0 = 1$ todennäköisyydellä yksi. Näin käy, olipa voiton todennäköisyys $\epsilon > 0$ miten pieni tahansa. Vaikuttaisi siis siltä, että tuplausstrategia tarjoaa varman tavan ansaita rahaa lähes missä tahansa uhkapelissä. Onko todella näin? Sitä tarkastellaan lisää seuraavissa kappaleissa.

7.3 Uhkapeli panostaen

Kun pelikierroksella s panostetaan H_s euroa ja yksittäisen pelikierroksen tuotto yksikköpanosta kohden on X_s euroa, niin pelaajan varallisuus pelikierroksen t jälkeen on

$$W_t = W_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s X_s.$$

Esimerkiksi uhkapeli vakiopanoksella saadaan, kun $H_t = 1$ kaikilla $t \geq 1$. Yleisiä panostusstrategioita analysoitaessa tulee muistaa, että valitessaan panosta pelikierrokselle t pelaajalla on käytössään tieto satunnaislukujen $W_0, X_1, \ldots, X_{t-1}$ realisaatioista, mutta ei tietoa tulevien pelikierrosten tuloksista. Rationaalinen pelaaja valitsee panoksensa deterministisenä funktiona satunnaisvektorista $(W_0, X_1, \ldots, X_{t-1})$, jolloin pelikierroksen panos toteuttaa

$$H_t \in \sigma(W_0, X_1, \ldots, X_{t-1}), \quad t \geq 1.$$

Tällöin sanotaan, että jono $(H_1, H_2, \ldots)$ on informaatioprosessin $(W_0, X_1, X_2, \ldots)$ suhteen *ennakoitava*.

Uhkapelin *yksikkötuottoprosessi* määritellään kaavalla

$$M_t = \sum_{s=1}^{t} X_s, \qquad t = 0, 1, \dots$$

Tämä vastaa alkuvarallisuudella nolla ($M_0 = 0$) starttaavan yksikköpanoksella ($H_s = 1$) sijoittavan pelaajan varallisuusprosessia. Koska $X_s = M_s - M_{s-1}$, voidaan alkuvarallisuutta W_0 ja yleistä sijoitusstrategiaa $(H_1, H_2, \dots)$ vastaava varallisuusprosessi esittää muodossa

$$W_t \ = \ W_0 + (H \cdot M)_t,$$

missä

$$(H \cdot M)_t \ = \ \sum_{s=1}^{t} H_s (M_s - M_{s-1}), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \tag{7.1}$$

on jonon $(H_1, H_2, \dots)$ *integraaliprosessi* yksikkötuottoprosessia $(M_0, M_1, \dots)$ vasten. Ylläolevalle kaavalle saadaan luonnollinen pörssitulkinta, kun M_t mielletään tarkasteltavan osakkeen päivän t päätöskurssiksi ja H_t osakkeiden lukumääräksi sijoittajan salkussa päivän t aikana.

Jatkuvan aikavälin sijoitusmalleissa integraaliprosessi voidaan määritellä stokastisena Itō-integraalina $(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s dM_s$. Tätä aihepiiriä käsitellään tarkemmin esimerkiksi stokastiikan jatkokurssilla MS-E1601 Brownian motion and stochastic analysis.

Lause 7.3. *Olkoon $(H_1, H_2, \dots)$ informaatioprosessin $(X_0, X_1, \dots)$ suhteen ennakoitava jono integroituvia satunnaislukuja siten, että $(H \cdot M)_t$ on integroituva kaikilla t.*

(i) Jos (M_t) on martingaali, on $(H \cdot M)_t$ martingaali.

(ii) Jos (M_t) on alimartingaali ja $H_t \geq 0$ kaikilla t, on $(H \cdot M)_t$ alimartingaali.

(iii) Jos (M_t) on ylimartingaali ja $H_t \geq 0$ kaikilla t, on $(H \cdot M)_t$ ylimartingaali.

Ennen lauseen 7.3 todistamista todetaan, että siinä vaadittu satunnaislukujen $(H \cdot M)_t$ integroituvuusehto toteutuu, jos jonon $(M_0, M_1, \dots)$ tai jonon $(H_1, H_2, \dots)$ satunnaisluvut ovat *rajoitettuja*[8]. Jos esimerkiksi $|H_s| \leq c_s$ kaikilla s, niin tällöin kolmioepäyhtälöä ja määritelmää (7.1) käyttämällä nähdään, että

$$\mathbb{E}|(H \cdot M)_t| \ \leq \ \sum_{s=1}^{t} c_s (\mathbb{E}|M_s| + \mathbb{E}|M_{s-1}|) < \infty,$$

sillä jokaisen martingaalin ja ylimartingaalin termit ovat määritelmän mukaan integroituvia. Vastaava päätelmä takaa integroituvuuden $\mathbb{E}|(H \cdot M)_t| < \infty$ myös silloin, kun termit $M_0, M_1, \dots$ ovat rajoitettuja ja termit $H_1, H_2, \dots$ integroituvia.

[8]Satunnaisluku Z on *rajoitettu*, jos $\mathbb{P}(|Z| \leq c) = 1$ jollain vakiolla c.

Lauseen 7.3 todistus. (i) Merkitään integraaliprosessia lyhyesti $W_t = (H \cdot M)_t$ ja otetaan käyttöön myös merkintä $X_{s:t} = (X_s, \dots, X_t)$. Integroituvuusoletuksen mukaan $\mathbb{E}|W_t| < \infty$ kaikilla $t \geq 0$. Koska $H_{1:t}$ määräytyy deterministisenä funktiona satunnaisvektorista $X_{0:(t-1)}$, ja $M_{0:t}$ määräytyy deterministisenä funktiona satunnaisvektorista $X_{0:t}$, voidaan yhtälöstä (7.1) päätellä, että

$$W_t \in \sigma(X_0, \dots, X_t). \tag{7.2}$$

Koska $(M_0, M_1, \dots)$ on martingaali, pätee

$$\mathbb{E}(M_{t+1} \,|\, X_{0:t}) \;=\; M_t \;=\; \mathbb{E}(M_t \,|\, X_{0:t}),$$

joten ehdollisen odotusarvon lineaarisuuden perusteella

$$\mathbb{E}(M_{t+1} - M_t \,|\, X_{0:t}) \;=\; 0. \tag{7.3}$$

Integraaliprosessin määritelmän perusteella puolestaan

$$W_{t+1} - W_t \;=\; H_{t+1}(M_{t+1} - M_t).$$

Ennakoitavuudesta seuraa, että $H_{t+1} \in \sigma(X_{0:t})$, joten tunnetun arvon ulosvedolla (lause 6.3) ja yhtälöä (7.3) soveltamalla

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_{t+1} - W_t \,|\, X_{0:t}) &= \mathbb{E}(H_{t+1}(M_{t+1} - M_t) \,|\, X_{0:t}) \\ &= H_t \, \mathbb{E}(M_{t+1} - M_t \,|\, X_{0:t}) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Ehdollisen odotusarvon lineaarisuutta ja tulosta (7.2) käyttämällä tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_{t+1} \,|\, X_{0:t}) &= \mathbb{E}(W_t \,|\, X_{0:t}) \;+\; \mathbb{E}(W_{t+1} - W_t \,|\, X_{0:t}) \\ &= \mathbb{E}(W_t \,|\, X_{0:t}) \\ &= W_t. \end{aligned}$$

Näin ollen $(W_0, W_1, \dots)$ on martingaali prosessin $(X_0, X_1, \dots)$ suhteen.

(ii) Kun $(M_0, M_1, \dots)$ on alimartingaali, voidaan samaan tapaan kuin yllä perustella, että $\mathbb{E}|W_t| < \infty$ ja $W_t \in \sigma(X_0, \dots, X_t)$. Samaan tapaan todistetaan myös $\mathbb{E}(W_{t+1} \,|\, X_{0:t}) \leq W_t$. Tässä tapauksessa kaavassa (7.3) ja kaavan (7.4) viimeisessä yhtälössä '$=$' vaihtuu muotoon '$\geq$'. Huomaa, että kohdan

$$\mathbb{E}(M_{t+1} - M_t \,|\, X_{0:t}) \;\geq\; 0 \quad\implies\quad H_t \, \mathbb{E}(M_{t+1} - M_t \,|\, X_{0:t}) \;\geq\; 0$$

perustelussa tarvitaan lisäoletusta $H_t \geq 0$.

(iii) Kun $(M_0, M_1, \dots)$ on ylimartingaali, on todistus analoginen kohdan (ii) todistuksen kanssa. □

Tarkastellaan uhkapeliä, jonka yksikkötuottoprosessi (M_t) on pelaajan käytettävissä olevan informaation (X_t) suhteen ylimartingaali ja oletetaan lisäksi, että yksikkötuottoprosessin termit ovat rajoitettuja. Tällaisia uhkapelejä ovat esimerkiksi RAY:n ruletissa punaiselle tai yhdelle numerolle panostaminen (esimerkki 7.1). Tällöin lauseen 7.3 perusteella myös pelaajan nettovarallisuus

$$W_t \;=\; W_0 + (H \cdot M)_t, \quad t \ge 0,$$

on ylimartingaali kaikilla ennakoitavilla sijoitusstrategioilla $(H_1, H_2, \dots)$, missä $H_t \ge 0$ ja $\mathbb{E}(H_t) < \infty$. Näin ollen pelaajan varallisuuskertymä $t \mapsto W_t$ on odotusarvoltaan vähenevä (lause 6.10). Voidaan siis tulkita, että tämäntyyppisessä epäsuotuisassa uhkapelissä ei voi tehdä odotusarvoisesti voittoa millään ennakoitavalla sijoitusstrategialla. Tässä yhteydessä ehto $H_t \ge 0$ estää pelaajaa ottamasta kasinon roolia.

Esimerkki 7.4 (Tuplausstrategia)**.** Jatketaan kappaleessa 7.2 esitellyn tuplausstrategian analysoimista. Merkitään pelikierroksen t tuottoa yksikköpanosta kohden $X_t \in \{-1, +1\}$ sekä ensimmäisen voitollisen kierroksen tapahtumahetkeä

$$T = \min\{t \ge 1 : X_t = +1\}.$$

Oletetaan, että satunnaisluvut $X_1, X_2, \dots$ ovat keskenään riippumattomat ja $\mathbb{P}(X_t = +1) = p$ ja $\mathbb{P}(X_t = -1) = q$, missä $0 < p < q$. Tällöin uhkapelin yksikkötuottoprosessi $M_t = \sum_{s=1}^t X_s$ on informaatioprosessin $(0, X_1, X_2, \dots)$ suhteen ylimartingaali ja aiemmin perusteltiin (lause 7.2), että T on varmuudella äärellinen satunnaisluku.

Tuplausstrategiaa vastaava panostusprosessi $(H_1, H_2, \dots)$ voidaan rekursiivisesti määritellä muodossa $H_1 = 1$ ja $H_{t+1} = 2H_t 1(t < T)$ kaikilla $t \ge 0$. Tästä päätellään, että

$$H_t \;=\; 2^{t-1}\,1(t \le T), \quad t = 0, 1, \dots$$

Koska T on satunnainen, ovat myös luvut H_t satunnaisia. Kirjoittamalla pelikierroksen t panos muodossa

$$H_t \;=\; \begin{cases} 2^{t-1}, & \text{jos } X_s = -1 \text{ kaikilla } s = 0, \dots, t-1, \\ 0, & \text{muuten,} \end{cases}$$

havaitaan, että $H_t \in \sigma(0, X_1, \dots, X_{t-1})$ kaikilla $t \ge 1$, eli panostusprosessi on informaatiojonon $(0, X_1, X_2, \dots)$ suhteen ennakoitava. Koska lisäksi H_t varmuudella toteuttaa $0 \le H_t \le 2^{t-1}$, voidaan lauseen 7.3 perusteella päätellä, että myös pelaajan nettovarallisuus

$$W_t \;=\; W_0 + (H \cdot M)_t, \quad t \ge 0,$$

on ylimartingaali. Näin ollen pelaajan nettovarallisuus $t \mapsto W_t$ on odotusarvoltaan vähenevä (lause 6.10), joten millä tahansa ajanhetkellä $t \ge 1$ pelaaja on odotusarvoisesti tappiolla.

Esimerkin 7.4 tulos vaikuttaa olevan ristiriidassa kappaleen 7.2 analyysin kanssa, jonka mukaan tuplausstrategialla voi tehdä varman voiton. Ristiriita selittyy huomaamalla, että tuplausstrategian odotettu nettotuotto on negatiivinen jokaisella *deterministisellä* ajanhetkellä t. Mikään ei kuitenkaan takaa, että ensimmäinen voitollinen kierros olisi toteutunut mihinkään ennalta valittuun deterministiseen ajanhetkeen mennessä. Seuraavassa kappaleessa analysoidaan tarkemmin, mitä tapahtuu kun pelaaminen lopetetaan satunnaisella ajanhetkellä.

7.4 Valintahetket

Yksinkertaisin pelistrategia, jossa pelistä poistutaan satunnaisella ajanhetkellä, on pelata satunnainen määrä T pelikierroksia yksikköpanoksella ja sen jälkeen lopettaa pelaaminen. Tätä vastaava panostusprosessi $(H_1, H_2, \dots)$ voidaan kirjoittaa lyhyesti muodossa $H_t = 1(t \le T)$ ja pidemmästi muodossa

$$H_t \;=\; \begin{cases} 1, & t \le T, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Seuraava tulos kertoo, milloin tällainen panostusprosessi on ennakoitava.

Lause 7.5. *Satunnaisjono $t \mapsto 1(t \le T)$ on informaatioprosessin $(X_0, X_1, \dots)$ suhteen ennakoitava, jos ja vain jos kaikilla $t \ge 0$ pätee*

$$1(T = t) \;\in\; \sigma(X_0, \dots, X_t). \tag{7.5}$$

Todistus. Oletetaan aluksi, että $(H_1, H_2, \dots)$ on ennakoitava. Tällöin $H_t \in \sigma(X_0, \dots, X_{t-1})$ ja $H_{t+1} \in \sigma(X_0, \dots, X_t)$, jolloin sekä H_t että H_{t+1} voidaan määrittää deterministisinä funktioina satunnaisvektorista $X_{0:t} = (X_0, \dots, X_t)$. Sama pätee myös satunnaisluvulle $1(T = t) = H_{t+1} - H_t$, joten (7.5) pätee.

Oletetaan seuraavaksi, että (7.5) on voimassa kaikilla $t \ge 0$. Tällöin jokainen satunnaisluvuista $1(T = 0), \dots, 1(T = t-1)$ voidaan määrittää deterministisinä funktiona satunnaisvektorista $(X_0, \dots, X_{t-1})$. Koska H_t voidaan kirjoittaa muodossa

$$H_t = 1 - \sum_{s=1}^{t-1} 1(T = s),$$

nähdään tästä, että $H_t \in \sigma(X_0, \dots, X_{t-1})$. Siispä $(H_1, H_2, \dots)$ on ennakoitava. □

Lauseen 7.5 tulos motivoi seuraavan yleisen määritelmän. Satunnaishetki $T \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ on satunnaisprosessin $(X_0, X_1, \dots)$ *valintahetki* eli pysäytyshetki, jos

$$1(T = t) \in \sigma(X_0, \dots, X_t) \quad \text{kaikilla } t \ge 0,$$

eli jos tapahtuman $\{T = t\}$ toteutuminen tai toteutumatta jääminen voidaan päätellä satunnaisvektorista $(X_0, \dots, X_t)$. Tämän määritelmän mukaan sijoitusstrategia $H_t = 1(t \le T)$ on siis ennakoitava täsmälleen silloin kun T on valintahetki.

Esimerkki 7.6 (Valintahetkiä)**.** Satunnaisjonon $(X_0, X_1, \dots)$ valintahetkiä ovat esimerkiksi:

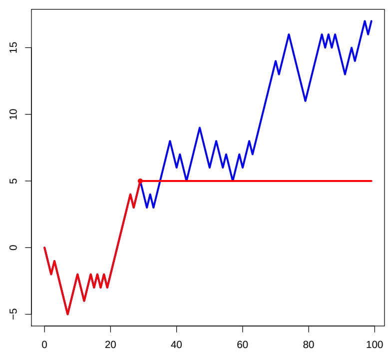
- hetki, jolloin (X_t) ensimmäisen kerran osuu joukkoon A,
- hetki, jolloin (X_t) neljännen kerran poistuu joukosta A,

kun ylläolevat hetket määritellään äärettömiksi, mikäli kuvattua tapahtumaa ei koskaa satu. Seuraavat satunnaiset ajanhetket puolestaan eivät yleensä ole valintahetkiä:

- hetki, jolloin (X_t) osuu viimeisen kerran joukkoon A,
- hetki, jolloin (X_t) saavuttaa kaikkien aikojen maksimiarvonsa.

7.5 Pysäytetyt martingaalit

Satunnaisprosessi $(M_t)_{t\ge 0}$ pysäytettynä satunnaishetkellä $T \in [0, \infty]$ on satunnaisprosessi $(M_{t\wedge T})_{t\ge 0}$, missä käytetään lyhennysmerkintää $t \wedge T = \min\{t, T\}$. Kuvaan 3 on piirretty erään prosessin polku (sinisellä) ja sitä vastaavan ajanhetkellä T pysäytetyn prosessin polku (punaisella), missä $T = \min\{t \ge 0 : M_t = 5\}$ on prosessin kulkuaika tilaan 5.



Kuva 3: Ajanhetkellä $T = \min\{t \ge 0 : M_t = 5\}$ pysäytetty prosessi.

Lause 7.7. *Valintahetkellä pysäytetty*

$$\begin{cases} \textit{alimartingaali on alimartingaali,} \\ \textit{martingaali on martingaali,} \\ \textit{ylimartingaali on ylimartingaali.} \end{cases}$$

Todistus. Olkoon (M_t) alimartingaali ja T valintahetki informaatioprosessin (X_t) suhteen. Pysäytetty prosessi $M_{t\wedge T}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} M_{t\wedge T} &= M_0 + \sum_{s=1}^{t\wedge T} (M_s - M_{s-1}) \\ &= M_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s(M_s - M_{s-1}) \;=\; M_0 + (H\cdot M)_t, \end{aligned}$$

missä $H_t = 1(t \le T)$. Lauseen 7.5 mukaan $(H_1, H_2, \dots)$ on ennakoitava. Lisäksi koska $0 \le H_t \le 1$, on $(H\cdot M)_t$ integroituva kaikilla t. Lauseen 7.3 perusteella $(H\cdot M)_t$ on alimartingaali. Selvästikin ajan suhteen vakio satunnaisprosessi $t \mapsto M_0$ on alimartingaali. Ehdollisen odotusarvon lineaarisuudesta seuraa, että kahden alimartingaalin summa on alimartingaali, joten prosessi $t \mapsto M_0 + M_{t\wedge T}$ on alimartingaali.

Täsmälleen sama todistus toimii myös martingaalia ja ylimartingaalia koskeville väittämille. □

7.6 Valinnaisen pysäyttämisen lause

Seuraavaksi tarkastellaan, mitä voidaan sanoa martingaalin arvosta satunnaisella valintahetkellä T. Jotta kyseisestä arvosta voidaan ylipäänsä puhua, on tarpeen olettaa, että ajanhetki T on *äärellinen* eli $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Seuraava tulos tunnetaan yleisesti *Doobin valinnaisen pysäyttämisen lauseena* amerikkalaisen matemaatikon Joseph Doobin (1910–2004) mukaan.

Lause 7.8. *Oletetaan, että T on äärellinen valintahetki ja $(M_0, M_1, \dots)$ on martingaali (vastaavasti alimartingaali, ylimartingaali). Oletetaan lisäksi, että on olemassa integroituva satunnaisluku Z siten, että*

$$|M_{t\wedge T}| \le Z \quad \textit{kaikilla } t \ge 0. \tag{7.6}$$

Tällöin $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$ (vastaavasti $\mathbb{E}(M_T) \ge \mathbb{E}(M_0)$, $\mathbb{E}(M_T) \le \mathbb{E}(M_0)$).

Lauseen ehto (7.6) pätee esimerkiksi silloin, kun valintahetki T tai pysäytetty prosessi $t \mapsto |M_{t\wedge T}|$ on rajoitettu ylhäältä jollain determinisellä vakiolla.

Todistus. Kun (M_t) on martingaali, on lauseen 7.7 mukaan $M_{t\wedge T}$ on martingaali, joten lauseen 6.10 mukaan $t \mapsto M_{t\wedge T}$ on odotusarvoisesti vakio. Näin ollen

$$\mathbb{E}(M_{t\wedge T}) \;=\; \mathbb{E}(M_{0\wedge T}) \;=\; \mathbb{E}(M_0)$$

kaikilla $t \ge 0$. Toisaalta valintahetken T äärellisyys takaa sen, että $\lim_{t\to\infty} M_{t\wedge T} = M_T$ todennäköisyydellä yksi. Odotusarvon alisteisen jatkuvuuden nojalla voidaan nyt päätellä, että

$$\mathbb{E}(M_T) \;=\; \mathbb{E}\left(\lim_{t\to\infty} M_{t\wedge T}\right) \;=\; \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(M_{t\wedge T}) \;=\; \mathbb{E}(M_0).$$

Täysin vastaavalla tapaa voidaan todistaa, että $\mathbb{E}(M_T) \ge \mathbb{E}(M_0)$ kun (M_t) on alimartingaali, ja $\mathbb{E}(M_T) \le \mathbb{E}(M_0)$ kun (M_t) on ylimartingaali. □

Seuraava esimerkki osoittaa, miten Doobin valinnaisen pysäyttämisen lauseen avulla voidaan analysoida Markov-ketjujen osumatodennäköisyyksiä.

Esimerkki 7.9 (Satunnaiskulku)**.** Olkoon $(S_0, S_1, \dots)$ symmetrinen satunnaiskulku lukujoukossa $\mathbb{Z}$, joka kulkee vasemmalle ja oikealle todennäköisyyksillä $1/2$. Oletetaan, että prosessin alkutila x toteuttaa $a < x < b$ joillain kokonaisluvuilla a ja b. Mikä on todennäköisyys, että satunnaiskulku saavuttaa tilan b ennen tilaa a?

Esimerkin 6.7 mukaan (S_t) on martingaali. Olkoon

$$T \;=\; \min\{t \geq 0 : S_t \in \{a, b\}\}$$

prosessin kulkuaika tilajoukkoon $\{a, b\}$. Tällöin T on prosessin $(S_0, S_1, \dots)$ valintahetki, ja tarkastelemalla yhtenäistä Markov-ketjua, joka vastaa satunnaiskulkua rajoitettuna joukkoon $[a, b]$ voidaan perustella, että T on äärellinen todennäköisyydellä yksi. Koska lisäksi $a \leq S_{t \wedge T} \leq b$, seuraa lauseesta 7.8, että

$$\mathbb{E}(S_T) \;=\; \mathbb{E}(S_0) \;=\; x.$$

Toisaalta valintahetkellä T_A satunnaiskulku saa joko arvon a tai b, joten

$$\mathbb{E}(S_T) \;=\; a(1 - \mathbb{P}(S_T = b)) + b\mathbb{P}(S_T = b).$$

Yhdistämällä nämä kaavat voidaan todeta, että

$$x \;=\; a(1 - \mathbb{P}(S_T = b)) + b\mathbb{P}(S_T = b),$$

josta voidaan ratkaista

$$\mathbb{P}(S_T = b) \;=\; \frac{x - a}{b - a}.$$

Esimerkki 7.10 (Tuplausstrategia)**.** Jatketaan vielä kappaleen 7.2 ja esimerkin 7.4 tuplausstrategian analysoimista. Tässä esimerkissä ensimmäisen voitollisen kierroksen tapahtumahetki

$$T \;=\; \min\{t \geq 1 : X_t = +1\}$$

on prosessin $(0, X_1, X_2, \dots)$ valintahetki. Kun yksittäisen pelikierroksen voittotodennäköisyys $0 < p \leq 1/2$, ovat pelin yksikkötuottoprosessi M_t ja tuplausstrategiaa $H_t = 2^{t-1} 1(t \leq T)$ vastaava varallisuusprosessi $W_t = (H \cdot M)_t$ ylimartingaaleja ja odotusarvoltaan väheneviä (esimerkki 7.4). Silti äärellisellä valintahetkellä T pelaajan varallisuus on $W_T = W_0 + 1$ todennäköisyydellä yksi.

Tässä tilanteessa Doobin valinnaisen pysäyttämisen lauseen väittämä ei pidä paikkaansa, sillä $\mathbb{E}(W_T) = \mathbb{E}(W_0) + 1 > \mathbb{E}(W_0)$. Valinnaisen pysäyttämisen lauseen ehdot eivät toteudu, sillä vaikka valintahetki T on äärellinen, se ei ole rajoitettu millään deterministisellä vakiolla. Myöskään pysäytetty prosessi $|W_{t \wedge T}|$ ei ole rajoitettu millään integroituvalla satunnaisluvulla. Voidaan siis todeta, että tuplausstrategialla todella on mahdollista saavuttaa varma yhden euron tuotto, jos pelaajan on mahdollista jatkaa pelaamista niin kauan, että ensimmäinen voitollinen kierros lopulta tapahtuu.

Tutkitaan vielä, kuinka paljon pelaaja odotusarvoisesti käy tappiolla ennen pääsemistään lopulta voitolle pääsyä. Pelaajan varallisuus juuri ennen voitolle pääsyä voidaan kirjoittaa muodossa

$$W_{T-1} \;=\; W_0 - \sum_{s=1}^{T-1} 2^{s-1} \;=\; W_0 + 1 - 2^{T-1}.$$

Lisäksi tapahtuman $\{T = t\}$, $t \geq 1$, todennäköisyys on

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T = t) \;&=\; \mathbb{P}(X_1 = -1, \ldots, X_{t-1} = -1, X_t = +1) \\
&=\; \mathbb{P}(X_1 = -1) \cdots \mathbb{P}(X_{t-1} = -1)\mathbb{P}(X_t = +1) \\
&=\; (1-p)^{t-1}p.
\end{aligned}$$

Epäsuotuisassa $(0 < p \leq 1/2)$ uhkapelissä siis

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_{T-1}) \;=\; W_0 + 1 - \mathbb{E}(2^{T-1}) \;&=\; W_0 + 1 - \sum_{t=1}^{\infty} 2^{t-1}(1-p)^{t-1}p \\
&=\; W_0 + 1 - p\sum_{t=0}^{\infty}(2(1-p))^t \;=\; -\infty.
\end{aligned}$$

Epäsuotuisassa uhkapelissä tuplausstrategiaa noudattavan pelaajan on siis ennen lopullista yhden euron voittoaan valmistauduttava käymään odotusarvoisesti äärettömän suuruisen euromäärän tappiolla.

8 Satunnaiset pistekuviot ja laskurimitat

8.1 Satunnainen pistekuvio

Välin $S \subset \mathbb{R}$ *satunnainen pistekuvio* on jollain todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathbb{P})$ määritelty satunnainen lokaalisti äärellinen[9] S:n osajoukko. Satunnainen pistekuvio on siis kuvaus $\omega \mapsto X(\omega)$ perusjoukosta Ω välin S lokaalisti äärellisten osajoukkojen kokoelmaan. Selkeyden vuoksi jätetään jatkossa riippuvuus ω:sta merkitsemättä.

Esimerkki 8.1. Olkoot $U_1, \dots, U_n$ riippumattomia välillä[10] $(0, 1)$ tasajakautuneita satunnaislukuja. Tällöin joukko $X = \{U_1, \dots, U_n\}$ on välin $(0, 1)$ satunnainen pistekuvio.

Esimerkki 8.2. Olkoot Z satunnainen kokonaisluku, joka noudattaa Poisson-jakaumaa parametrilla $\lambda > 0$, eli $\mathbb{P}(Z = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \dots$. Tällöin joukko $X = \{n \in \mathbb{Z}_+ : n \le Z\}$ on välin $\mathbb{R}_+$ satunnainen pistekuvio.

Tarkalleen ottaen satunnaisen pistekuvion määritelmässä tulee vaatia, että kuvaus $X : \Omega \to \mathcal{N}(S)$ on mitallinen suhteessa kuvausten $B \mapsto |X \cap B|$, $B \subset S$ avoin, virittämään avaruuden $\mathcal{N}(S)$ sigma-algebraan, missä $\mathcal{N}(S)$ on S:n lokaalisti äärellisten osajoukkojen kokoelma. Teknisiä mitallisuusominaisuuksia ei kuitenkaan tässä yhtedessä sen koommin käsitellä; lisätietoja voi katsoa esim. kirjoista [Kal02, SW08].

8.2 Laskurimitta ja laskuriprosessi

Välin $S \subset \mathbb{R}$ satunnaisen pistekuvion X *laskurimitta* on satunnaiskuvaus

$$N(B) = |X \cap B|$$

joka kertoo X:n pisteiden lukumäärän joukossa $B \subset S$.

Esimerkki 8.3. Esimerkin 8.1 pistekuvion X laskurimitta voidaan kirjoittaa muodossa

$$N(B) = \sum_{i=1}^{n} 1(U_i \in B), \quad B \subset (0, 1),$$

missä tapahtuman $\{U_i \in B\}$ *indikaattori* $1(U_i \in B)$ määritellään kaavalla

$$1(U_i \in B) = \begin{cases} 1, & \text{jos } U_i \in B, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

[9] Välin $S \subset \mathbb{R}$ osajoukko X on *lokaalisti äärellinen*, jos $X \cap K$ on äärellinen aina kun $K \subset S$ on suljettu ja rajoitettu.

[10] (a, b) tarkoittaa reaaliakselin avointa väliä $a < x < b$.

Tarkasteltavan satunnaisilmiön tapahtumahetkiä voidaan mallintaa välin $\mathbb{R}_+$ satunnaisena pistekuviona X. Tällöin tapahtumien lukumäärää aikavälillä $[0,t]$ merkitään usein lyhyesti

$$N(t) = N([0,t])$$

ja satunnaisfunktiota $t \mapsto N(t)$ kutsutaan pistekuvion X *laskuriprosessiksi*. Kun N:n argumenttina on joukko, tarkoitetaan laskurimittaa; ja kun N:n argumenttina on luku, tarkoitetaan laskuriprosessia. Määritelmästä seuraa suoraan, että X:n pisteiden lukumäärä välillä $(s,t]$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$|X \cap (s,t]| \;=\; N((s,t]) \;=\; N(t) - N(s).$$

8.3 Riippumattomasti sironnut pistekuvio

Satunnainen pistekuvio X on *riippumattomasti sironnut*, jos satunnaismuuttujat $N(A_1), \dots N(A_m)$ ovat riippumattomat aina kun joukot $A_1, \dots, A_m$ ovat erilliset. Tällöin tieto siitä, miten satunnaisen pistekuvion pisteet ovat jakautuneet tietyssä joukossa A ei kerro mitään kyseisen pistekuvion käyttäytymisestä A:n ulkopuolella.

Riippumaton sironneisuus on itseasiassa hyvin vahva tilastollinen vaatimus satunnaisen pistekuvion jakaumalle, jonka harvat pistekuviot toteuttavat.

Esimerkki 8.4. Onko esimerkin 8.1 pistekuvio $X = \{U_1, \dots, U_n\}$ riippumattomasti sironnut? Jaetaan avoin yksikköväli osiin $A_1 = (0, 1/2]$ ja $A_2 = (1/2, 1)$ ja todetaan, että

$$\mathbb{P}(N(A_1) = 0) \;=\; \mathbb{P}(U_1 > 1/2, \dots, U_n > 1/2) \;=\; (1/2)^n.$$

Toisaalta

$$\mathbb{P}(N(A_1) = 0 \,|\, N(A_2) = n) \;=\; 1,$$

sillä määritelmän mukaan varmuudella pätee $N(A_1) + N(A_2) = n$. Näin ollen satunnainen pistekuvio X ei ole riippumattomasti sironnut.

Välin $\mathbb{R}_+$ satunnainen pistekuvio X on *tasakoosteinen*, jos sen laskurimitalle pätee[11]

$$N(A + t) =_{\mathrm{st}} N(A)$$

kaikilla $A \subset \mathbb{R}_+$ ja kaikilla $t \geq 0$, missä $A + t = \{a + t : a \in A\}$. Tasakoosteisen pistekuvion *intensiteetti* on sen pisteiden lukumäärän odotusarvo $\mathbb{E}(N(0,1])$ yksikkövälillä $(0,1]$.

[11] Tässä luentomonisteessa $X =_{\mathrm{st}} Y$ tarkoittaa, että satunnaismuuttujat X ja Y joudattavat samaa jakaumaa eli $\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(Y \in B)$ kaikilla B.

8.4 Pisteiden lukumäärän jakauma

Seuraava tärkeä tulos kertoo, miten pistekuvion riippumaton sironneisuus, luonteeltaan algebrallinen ominaisuus, automaattisesti kertoo kvantitatiivisen piirteen pisteiden lukumäärän jakaumasta. Se myös selittää Poisson-jakauman keskeisen merkityksen universaalina jakaumana, joka kuvaa tasakoosteisia riippumattomasti sironneita pistekuvioita.

Lause 8.5. *Olkoon X välin $\mathbb{R}_+$ tasakoosteinen riippumattomasti sironnut pistekuvio intensiteetillä $0 < \lambda < \infty$. Tällöin sen pisteiden lukumäärä välillä $[0,t]$ on Poisson-jakautunut parametrilla λt, eli*

$$\mathbb{P}(N(t) = k) \ = \ e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Todistus. Olkoon

$$v(t) \ = \ \mathbb{P}(N(0,t] = 0)$$

todennäköisyys, että välillä $(0,t]$ ei ole yhtään X:n pistettä. Koska $N(0,s+t] = 0$ täsmälleen silloin kun $N(0,s] = 0$ ja $N(s,s+t] = 0$, havaitaan että

$$\begin{aligned}
v(s+t) &= \mathbb{P}(N(0,s+t] = 0) \\
&= \mathbb{P}(N(0,s] = 0,\ N(s,s+t] = 0) \\
&= \mathbb{P}(N(0,s] = 0)\mathbb{P}(N(s,s+t] = 0) \\
&= \mathbb{P}(N(0,s] = 0)\mathbb{P}(N(0,t] = 0) \\
&= v(s)v(t).
\end{aligned}$$

Koska v on vähenevä funktio, tästä seuraa (Harjoitustehtävä 1), että

$$v(t) = e^{-\alpha t} \tag{8.1}$$

jollain $\alpha \geq 0$. Lisäksi $\alpha > 0$, sillä tapauksessa $\alpha = 0$ pistekuvio olisi tyhjä tn:llä 1 (Harjoitustehtävä 3), mikä johtaisi ristiriitaan oletuksen $\lambda = \mathbb{E}(N(0,1]) > 0$ kanssa. Samoin voidaan perustella, että $\alpha < \infty$, sillä tapauksessa $\alpha = \infty$ olisi X:llä äärettömästi pisteitä jokaisella epätyhjällä välillä, mikä johtaisi ristiriitaan oletuksen $\lambda = \mathbb{E}(N(0,1]) < \infty$ kanssa.

Tutkitaan seuraavaksi tapahtuman $N(t) = k$ todennäköisyyttä jollain valitulla $t > 0$ ja kokonaisluvulla $k \geq 0$. Valitaan jokin iso luku $n \geq k$ ja jaetaan väli $(0,t]$ tasapituisiin osaväleihin $I_{n,j} = (\frac{j-1}{n}t, \frac{j}{n}t]$, $j = 1, \dots, n$. Merkitään

$$\theta_j \ = \ 1(N(I_{n,j}) > 0) \ = \ \begin{cases} 1, & \text{jos } N(I_{n,j}) > 0, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Tällöin $Z_n = \theta_1 + \cdots + \theta_n$ on osavälien lukumäärä, jotka sisältävät X:n pisteitä. Merkitään Ω_n:llä tapahtumaa, että kullakin osavälillä on enintään yksi piste. Tapahtuman Ω_n vallitessa $N(t) = Z_n$, mistä seuraa, että

$$\mathbb{P}(N(t) = k) \ = \ \mathbb{P}(Z_n = k) + \epsilon_n, \tag{8.2}$$

missä

$$\epsilon_n = \mathbb{P}(N(t)=k,\, \Omega_n^c) - \mathbb{P}(Z_n = k,\, \Omega_n^c).$$

Koska indikaattorimuuttujat $\theta_1, \dots, \theta_n$ ovat riippumattomia (riippumaton sironneisuus) ja kukin niistä saa arvon yksi todennäköisyydellä

$$q_n = 1 - v(t/n),$$

havaitaan, että Z_n on binomijakautunut parametrein n ja q_n, eli

$$\mathbb{P}(Z_n = k) = \binom{n}{k} q_n^k (1-q_n)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Yhtälön (8.1) ja l'Hôspitalin säännön avulla nähdään, että

$$nq_n = n(1 - e^{-\alpha t/n}) = \frac{1 - e^{-\alpha t/n}}{1/n} \to \alpha t$$

kun $n \to \infty$. Pienten lukujen lain (Lause 8.6) perusteella voidaan tästä päätellä, että

$$\mathbb{P}(Z_n = k) \to e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!}, \quad \text{kun } n \to \infty. \tag{8.3}$$

Koska Lemman 8.7 nojalla $|\epsilon_n| \le 2\mathbb{P}(\Omega_n^c) \to 0$, ja koska tapahtuman $N(t) = k$ todennäköisyys ei riipu n:stä, nähdään yhtälöistä (8.2) ja (8.3), että

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!}.$$

Siispä $N(t)$ on Poisson-jakautunut parametrilla αt. Erityisesti $\mathbb{E}(N(t)) = \alpha t$, mistä nähdään, että $\alpha = \lambda = \mathbb{E}(N(0,1])$. □

Lemma 8.6 (Pienten lukujen laki)**.** *Olkoon $Z_1, Z_2, \dots$ jono satunnaislukuja, missä Z_n on binomijakautunut parametrein n ja q_n ja $nq_n \to \alpha \in (0,\infty)$, kun $n \to \infty$. Tällöin*

$$\mathbb{P}(Z_n = k) \to e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!} \quad \textit{kaikilla } k \ge 0,$$

kun $n \to \infty$.

Todistus. Todennäköisyys, että Z_n saa arvon k, voidaan kirjoittaa muodossa

$$\binom{n}{k} q_n^k (1-q_n)^{n-k} = \frac{n!}{n^k (n-k)!} \frac{1}{(1-q_n)^k} \frac{(nq_n)^k}{k!} \left(1 - \frac{nq_n}{n}\right)^n.$$

Analysoidaan oikean puolen lauseke termi termiltä, kun $n \to \infty$. Ensimmäinen termi toteuttaa

$$\frac{n!}{n^k(n-k)!} = \frac{1}{n^k} \prod_{j=0}^{k-1} (n-j) = \prod_{j=0}^{k-1} (1 - j/n) \to 1.$$

Koska $q_n \to 0$, nähdään, että toinen termi toteuttaa

$$\frac{1}{(1-q_n)^k} \to 1.$$

Lisäksi oletuksesta $nq_n \to \alpha$ seuraa, että kolmas termi toteuttaa

$$\frac{(nq_n)^k}{k!} \to \frac{\alpha^k}{k!}.$$

Kunhan vielä osoitetaan, että neljäs termi toteuttaa

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{nq_n}{n}\right)^n = e^{-\alpha}, \tag{8.4}$$

voidaan siis päätellä, että

$$\mathbb{P}(Z_n = k) \to e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!},$$

eli väite pitää paikkansa.

Raja-arvo (8.4) voidaan perustella seuraavasti. Valitaan jokin pieni $\epsilon > 0$ ja valitaan n_0 niin suureksi, että $\alpha - \epsilon \le nq_n \le \alpha + \epsilon$ kaikilla $n \ge n_0$. Tällöin kaikilla $n \ge n_0$ pätee

$$\left(1 - \frac{\alpha+\epsilon}{n}\right)^n \le \left(1 - \frac{nq_n}{n}\right)^n \le \left(1 - \frac{\alpha-\epsilon}{n}\right)^n.$$

Käyttämällä kaavaa $(1 + x/n)^n \to e^x$, nähdään, että

$$e^{-\alpha-\epsilon} \le \liminf_{n\to\infty} \left(1 - \frac{nq_n}{n}\right)^n \le \limsup_{n\to\infty} \left(1 - \frac{nq_n}{n}\right)^n \le e^{-\alpha+\epsilon}$$

Koska ylläolevissa estimaateissa $\epsilon > 0$ voidaan valita mielivaltaisen pieneksi, väite (8.4) seuraa.

□

Lemma 8.7. *Olkoon X välin $S \subset \mathbb{R}$ satunnainen pistekuvio ja N sen laskurimitta. Oletetaan, että joukolle $A \subset S$ pätee $\mathbb{E}(N(A)) < \infty$. Ositetaan reaaliakseli $1/n$-pituisiin väleihin $I_{n,j} = (\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$, $j \in \mathbb{Z}$. Tällöin*

$$\mathbb{P}\Big(N(A \cap I_{n,j}) \le 1 \text{ kaikilla } j \in \mathbb{Z}\Big) \to 1, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Todistus. Koska $\mathbb{E}(N(A)) < \infty$, on joukko $X \cap A$ äärellinen tn:llä 1. Olkoon satunnaisluku

$$D = \min\{|x-y| : \ x, y \in X \cap A, \ x \ne y\}$$

pienin joukon $X \cap A$ pisteiden välisistä etäisyyksistä. Kun $n > 1/D$, on jokaisen joukon $X \cap A$ pisteparin välillä vähintään $1/n$-levyinen aukko, joten jokaisella välillä $I_{n,j}$ voi olla enintään yksi joukon $X \cap A$ piste. Näin ollen

$$Z_n := \sup_j N(A \cap I_{n,j}) = \sup_j |X \cap A \cap I_{n,j}\,| \le 1$$

kunhan $n > 1/D$. Näin ollen tapahtuman $\{Z_n \leq 1\}$ indikaattorille pätee $1(Z_n \leq 1) \to 1$, kun $n \to \infty$, ja alisteisen suppenemisen nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq 1) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}1(Z_n \leq 1) = \mathbb{E} \lim_{n\to\infty} 1(Z_n \leq 1) = 1.$$

□

8.5 Poisson-prosessi

Satunnaisfunktio $N : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{Z}_+$ on *Poisson-prosessi* intensiteetillä λ, jos

- $N(t) - N(s) =_{\mathrm{st}} \mathrm{Poi}(\lambda(t-s))$ kaikilla $(s,t] \subset \mathbb{R}_+$.
- N:llä on riippumattomat muutokset, eli

  $$N(t_1) - N(s_1), \dots, N(t_n) - N(s_n)$$

  ovat riippumattomat kaikilla erillisillä $(s_1,t_1], \dots, (s_n,t_n] \subset \mathbb{R}_+$.

Yllä määritelty satunnaisfunktio $t \mapsto N(t)$ on siis jatkuva-aikainen stokastinen prosessi numeroituvassa tilajoukossa $\mathbb{Z}_+$. Lause 8.5 voidaan nyt muotoilla uudelleen seuraavasti.

Lause 8.8. *Tasakoosteisen riippumattomasti sironneen pistekuvion laskuriprosessi $N(t) = N(0,t]$ on Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda = \mathbb{E}(N(0,1])$.*

8.6 Riippumattomasti sironneen pistekuvion rakentaminen

Onko riippumattomasti sironneita pistekuvioita olemassa? Rakennetaan yksi sellainen. Määritellään aluksi satunnaisluvut $T_1, T_2, \dots$ kaavalla

$$T_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n, \quad n \geq 1,$$

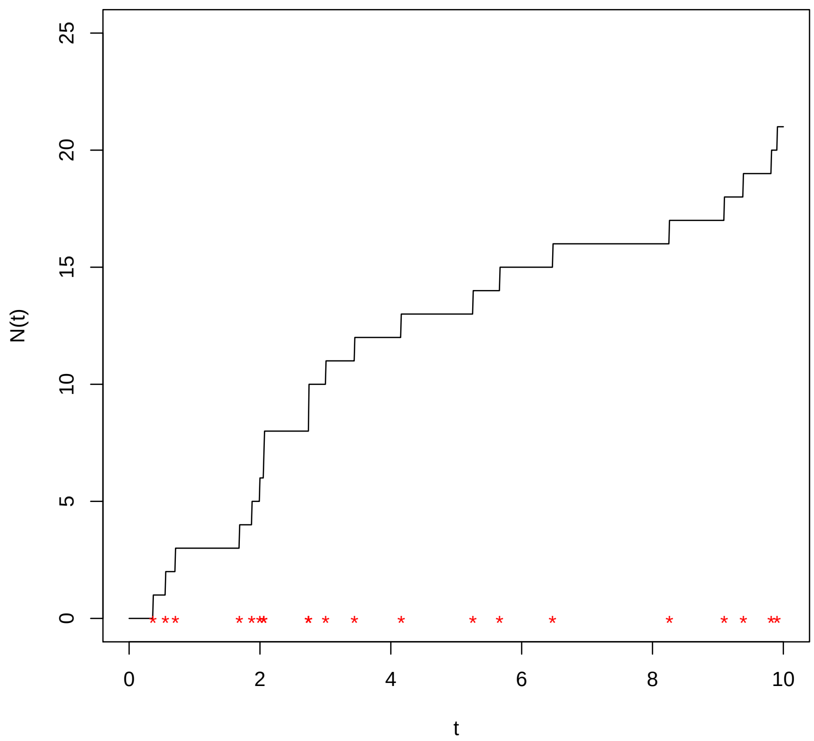
missä $\tau_1, \tau_2, \dots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita positiivisia satunnaislukuja. Kuvassa 4 esitetään näin rakennetun pistekuvion realisaatio ja sitä vastaava laskuriprosessi.

Lause 8.9. *Jos pisteiden välimatkat $\tau_1, \tau_2, \dots$ ovat eksponenttijakautuneita vauhtiparametrilla λ, niin pistekuvio $X = \{T_1, T_2, \dots\}$ on tasakoosteinen ja riippumattomasti sironnut, ja sitä vastaava laskuriprosessi*

$$N(t) \;=\; |X \cap (0,t]| \;=\; |\{k \geq 1 : \tau_k \leq t\}|$$

on Poisson-prosessi intensiteetillä λ.

Todistus. Harjoitustehtävä. (Tämä saattaa olla vaikeahko harjoitustehtävä, ehkä luentomonisteen seuraaavaan versioon todistus ilmestyy tänne.) □



Kuva 4: Lauseen 8.9 menetelmällä simuloitu pistekuvio ja sitä vastaavan Poisson-prosessin polku aikavälillä $(0, 10]$.

8.7 Harjoitustehtäviä

1. Olkoon $f : \mathbb{R}_+ \to [0, 1]$ vähenevä funktio, jolle $f(s+t) = f(s)f(t)$ kaikilla $s, t \geq 0$. Todista, että $f(t) = f(1)^t$
   (a) kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla m,
   (b) kaikilla positiivisilla rationaaliluvuilla q,
   (c) kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla t.

2. Tarkastellaan joukon $(0, \infty)$ satunnaista tasakoosteista pistekuviota, jolle pätee $\mathbb{P}(N(t) = 0) = 0$ kaikilla $t \geq 0$.
   (a) Todista, että $\mathbb{E}(N(b) - N(a)) \geq 1$ kaikilla $0 < a < b$.
   (b) Todista, että $\mathbb{E}N(1) = \infty$.

3. Tarkastellaan joukon $(0, \infty)$ satunnaista tasakoosteista pistekuviota, jolle $\mathbb{P}(N(t) = 0) = 1$ kaikilla $t \geq 0$. Todista, että tällainen pistekuvio tyhjä todennäköisyydellä yksi.

4. Olkoot $K, U_1, U_2, \ldots$ riippumattomia satunnaislukuja, missä K on Poisson-jakautunut parametrilla λ ja $U_1, U_2, \ldots$ ovat tasajakautuneita välillä $(0, 1)$. Määritellään satunnainen pistekuvio kaavalla

$$X = \{U_1, U_2, \ldots, U_K\}$$

   ja sen laskuriprosessi kaavalla

$$N(t) \;=\; |\{k \leq K : U_k \leq t\}|, \quad t \in [0, 1].$$

   (a) Todista, että $N(t) - N(s)$ on Poisson-jakautunut kaikilla $0 < s < t < 1$.
   (b) Todista, että N:llä on riippumattomat muutokset välillä $[0, 1]$.

5. Olkoot $\tau_1, \tau_2, \ldots$ riippumattomia $\mathrm{Exp}(\lambda)$-jakautuneita satunnaismuuttujia. Määritellään satunnainen pistekuvio kaavalla

$$X = \{T_1, T_2, \ldots\},$$

   missä $T_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n$, ja sen laskuriprosessi kaavalla

$$N(t) \;=\; |\{k \geq 1 : T_k \leq t\}|, \quad t \in (0, \infty).$$

   (a) Todista, että pistekuvio X on riippumattomasti sironnut.
   (b) Todista, että pistekuvio X on tasakoosteinen.

   Apua voi katsoa esim. kirjoista [Kal02, Ros95]

9 Poisson-prosessit ja uusiutumisprosessit

9.1 Poisson-prosessin määritelmä stokastisena prosessina

Edellisessä luvussa nähtiin, miten Poisson-prosessi ilmenee riippumattomasti ja tasaisesti sironneen satunnaisen pistekuvion laskuriprosessina. Poisson-prosessi voidaan suoraan määritellä stokastisena prosessina seuraavasti. Satunnaisfunktio $N : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{Z}_+$ on *Poisson-prosessi* intensiteetillä $\lambda > 0$, jos

(i) $N(0) = 0$,

(ii) $N(t) - N(s) =_{\mathrm{st}} \mathrm{Poi}(\lambda(t-s))$ kaikilla $s < t$,

(iii) N:llä on riippumatomat muutokset, eli

$$\begin{gathered} (s_1, t_1], \dots, (s_k, t_k] \text{ erilliset} \\ \Longrightarrow \\ N(t_1) - N(s_1), \dots, N(t_k) - N(s_k) \text{ riippumattomat.} \end{gathered}$$

Poisson-prosessin polut ovat paloittain vakioita ja kasvavat yksikköhyppäyksin satunnaisilla ajanhetkillä. Yleisen tavan mukaan käytetään lisäksi oletusta, että Poisson-prosessin polut ovat oikealta jatkuvia. Tällöin Poisson-prosessin n:s hyppyhetki eli prosessin kulkuaika tilaan n voidaan kirjoittaa muodossa

$$T_n \;=\; \min\{t \geq 0 : N(t) = n\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

ja hyppyhetkien kokoelma $\{T_1, T_2, \dots\}$ muodostaa riippumattomasti ja tasaisesti sironneen $\mathbb{R}_+$:n pistekuvion, jonka laskuriprosessi $N(t)$ on, eli pätee

$$N(t) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} 1(T_i \leq t).$$

Satunnaishetkiä $T_1, T_2, \dots$ kutsutaan lyhyesti Poisson-prosessin *tapahtumahetkiksi* tai *pisteiksi*, jolloin muutos $N(t) - N(s)$ kertoo Poisson-prosessien tapahtumahetkien lukumäärän aikavälillä $(s, t]$. Tämä lukumäärä on todennäköisyydellä yksi sama kuin tapahtumien lukumäärä aikavälillä $[s, t]$ tai (s, t), sillä todennäköisyys, että Poisson-prosessin tapahtumahetki osuisi täsmälleen johonkin deterministiseen reaaliakselin pisteeseen on nolla. Tämä seuraa siitä, että jokaisen tapahtumahetken T_n jakaumalla on tiheysfunktio (T_n noudattaa gammajakaumaa muotoparametrilla n ja vauhtiparametrilla λ). Näin ollen Poisson-prosessin tapahtumahetkien lukumäärä yksikkövälillä $(t, t+1]$ (tai $[t, t+1]$ tai $(t, t+1)$) noudattaa $\mathrm{Poi}(\lambda)$-jakaumaa, ja odotusarvoinen tapahtumahetkien lukumäärää aikayksikköä kohden on λ.

9.2 Päällekkäiset Poisson-prosessit

Seuraava lause kertoo intuitiivisesti selkeän asian, että asettelemalla päällekkäin useita toisistaan riippumattomia Poisson-prosesseja saadaan aikaan Poisson-prosessi. Lauseen summassa voi indeksijoukko olla äärellinen tai numeroituvasti ääretön. Äärettömän indeksijoukon tapauksessa tulee olettaa, että $\sum_j \lambda_j < \infty$.

Lause 9.1. *Jos $N_1, N_2, \dots$ ovat riippumattomia Poisson-prosesseja intensiteeteillä λ_j, niin tällöin $N(t) = \sum_j N_j(t)$ on Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda = \sum_j \lambda_j$.*

Lauseen todistamiseen käytetään seuraavaa aputulosta.

Lemma 9.2. *Jos $N_j =_{\mathrm{st}} \mathrm{Poi}(\lambda_j)$ ovat riippumattomia, niin $\sum_j N_j =_{\mathrm{st}} \mathrm{Poi}(\sum_j \lambda_j)$.*

Todistus. Lasketaan satunnaisluvun N_j todennäköisyydet generoiva funktio (tngf). Kyseinen tngf pisteessä $z \in [0, 1]$ saadaan kaavasta

$$G_{N_j}(z) \;=\; \mathbb{E}(z^{N_j}) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(e^{-\lambda_j} \frac{\lambda_j^n}{n!} \right) \;=\; e^{-\lambda_j}\, e^{\lambda_j z} \;=\; e^{\lambda_j (z-1)}.$$

Riippumattomuutta hyväksi käyttämällä havaitaan, että summan tngf toteuttaa

$$G_{\sum_j N_j}(z) \;=\; \mathbb{E}(z^{\sum_j N_j}) \;=\; \prod_j \mathbb{E}(z^{N_j}) \;=\; \prod_j e^{\lambda_j (z-1)} \;=\; e^{\sum_j \lambda_j (z-1)}.$$

Koska tngf määrittää jakauman yksikäsitteisesti, $\sum_j N_j =_{\mathrm{st}} \mathrm{Poi}(\sum_j \lambda_j)$. □

Lauseen 9.1 todistus. Tarkistetaan kohta kohdalta Poisson-prosessin määritelmän (kappale 9.1) kolme ehtoa.

(i) Selvästi $N(0) = \sum_j N_j(0) = 0$.

(ii) Lemman 9.2 avulla havaitaan, että $N(t) - N(s) = \sum_j (N_j(t) - N_j(s)) =_{\mathrm{st}} \mathrm{Poi}(\lambda(t-s)$, missä $\lambda = \sum_j \lambda_j$.

(iii) Onko N:llä riippumattomat muutokset? Jos aikavälit $(s_1, t_1]$ ja $(s_2, t_2]$ ovat erilliset, niin tällöin

$$N_j(s_1, t_1] \perp\!\!\!\perp N_j(s_2, t_2] \quad \text{kaikilla } j.$$

Koska lisäksi N_j:t ovat toisistaan riippumattomat, voidaan tästä päätellä, että

$$\sum_j N_j(s_1, t_1] \perp\!\!\!\perp \sum_j N_j(s_2, t_2]$$

Näin ollen satunnaisluvut $N(s_1, t_1]$ ja $N(s_2, t_2]$ ovat riippumattomat. Vastaava todistus toimii myös, kun tarkastellaan useampaa erillistä aikaväliä, joten N:llä on riippumattomat muutokset. □

9.3 Yhdistetty Poisson-prosessi

Poisson-prosessi $N(t)$ kuvastaa riippumattomasti ja tasaisesti sironneiden ajanhetkien lukumäärää aikavälillä $[0, t]$. Jos tarkasteltavien ajanhetkien nettolukumäärä voidaan tulkita kertymäksi lukuisista harvoista tapahtumasarjoista, niin tällöin tarkasteltavien ajanhetkien kertymää ajanhetkeen t asti voidaan usein melko tarkasti mallintaa Poisson-prosessilla. Esimerkiksi suurella moottoritiellä havaittujen ajoneuvojen liikennevirtaa voidaan mallintaa Poisson-prosessilla, jos sisääntuloväylien liikennevalojen ja yhteiskunnan vuorokausirytmin (koulujen alkamisajat, työpäivien päättymisajat) korrelaatiovaikutukset ovat vähäiset.

Useissa satunnaisilmiöissä satunnaisiin tapahtumahetkiin liittyy myös muita satunnaismuuttujia, jotka on tarpeen mallintaa jotenkin. Seuraava esimerkki edustaa tyypillistä tilannetta.

Esimerkki 9.3 (Liikennevirta)**.** Länsiväylää pitkin Helsingin ja Espoon välisen kuntarajan ylittää Espoon suuntaan arkipäivisin klo 10–14 keskimäärin 40 autoa minuutissa, joissa matkustaa keskimäärin 1.9 henkilöä per auto. Autoa kohden olevien matkustajien keskihajonnaksi on estimoitu 1.2. Mallinna kuntarajan ylittävien yksityisautoilua käyttävien matkustajien liikennevirtoja tilastollisesti. Mikä on tunnin aikana kuntarajan ylittävien matkustajien odotusarvo ja keskihajonta?

Positiivisen reaaliakselin $\mathbb{R}_+$ satunnaisen pistekuvion $X = \{T_1, T_2, \dots\}$ tapahtumahetkiin voidaan liittää lisää satunnaisuutta määrittelemällä

$$\tilde{X} = \{(T_1, Z_1), (T_2, Z_2), \dots\},$$

missä $Z_1, Z_2, \dots$ ovat riippumattomia tilajoukon S satunnaismuuttujia, jotka ovat lisäksi riippumattomia satunnaisjonosta $(T_1, T_2, \dots)$. Näin aikaansaatua tulojoukon $\mathbb{R}_+ \times S$ satunnaista pistekuviota $\tilde{X}$ kutsutaan joskus *merkityksi pistekuvioksi*. Kun satunnaismuuttujat $Z_1, Z_2, \dots$ ovat reaaliarvoisia, saadaan merkitylle pistekuviolle luonteva tulkinta mieltämällä Z_i mallin tuotoksi (tai kustannukseksi) satunnaisella ajanhetkellä T_i. Tällöin ajanhetkeen t mennessä kertynyt nettotuotto voidaan kirjoittaa muodossa

$$S(t) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} Z_i \, 1(T_i \le t).$$

Kun satunnaisen pistekuvion $\{T_1, T_2, \dots\}$ laskuriprosessia merkitään

$$N(t) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} 1(T_i \le t),$$

voidaan nettotuotto kirjoittaa summana

$$S(t) \;=\; \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i, \tag{9.1}$$

joka tulkitaan tapahtuman $\{N(t) = 0\}$ vallitsessa nollaksi. Kun $N(t)$ on Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda > 0$ ja satunnaisluvut $Z_1, Z_2, \ldots$ ovat jakautuneet kertymäfunktion F mukaisesti, niin kaavan (9.1) määrittämää satunnaisprosessia $S(t)$ kutsutaan *yhdistetyksi Poisson-prosessiksi* parametrilla (λ, F).

Esimerkki 9.4 (Liikennevirta)**.** Esimerkissä 9.3 tarkasteltua henkilöautojen kertymää voidaan mallintaa Poisson-prosessilla $(N(t) : t \geq 0)$, jonka intensiteetti on $\lambda = 40$, kun aikayksiköksi valitaan yksi minuutti ja aikaa mitataan kuluneina minuutteina tarkasteluvälin alkuhetkestä. Ajanhetkellä T_i kuntarajan ylittävään henkilöautoon liitetään satunnaisluku Z_i, joka kertoo autossa matkustavien henkilöiden lukumäärän. Mallissa on luontevaa olettaa luvut $Z_1, Z_2, \ldots$ toisistaan ja ajanhetkistä $T_1, T_2, \ldots$ riippumattomiksi. Kun näin tehdään, voidaan aikavälillä $[0, t]$ kuntarajan ylittäneiden matkustajien lukumäärä esittää yhdistettynä Poisson prosessina

$$S(t) \;=\; \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$$

parametrilla (λ, F). Tässä yhteydessä kertymäfunktiota F ei ole tarkalleen määritetty, mutta tiedetään kuintenkin, että satunnaisluvut Z_i saavat arvonsa tilajoukossa $S = \{1, 2, \ldots, 7\}$ ja lisäksi pätee $\mathbb{E}(Z_i) = m$ ja $\mathrm{Var}(Z_i) = \sigma^2$ parametreilla $m = 1.9$ ja $\sigma = 1.2$.

Lause 9.5. *Yhdistetyllä Poisson-prosessilla on riippumattomat muutokset ja sen odotusarvo ja varianssi ajanhetkellä t saadaan laskettua kaavoista*

$$\mathbb{E}(S(t)) \;=\; \lambda m t$$

ja

$$\mathrm{Var}(S(t)) \;=\; \lambda(m^2 + \sigma^2)t,$$

missä $m = \mathbb{E}(Z_i)$ ja $\sigma^2 = \mathrm{Var}(Z_i)$.

Todistus. Riippumattomien muutoksien todistaminen on intuitiivisesti selkeän tuntuinen asia. Tarkka todistus voidaan tehdä ehdollistamalla muotoa $A_k = \{N_k(s_k) = m_k, N_k(t_k) = m_k + r_k\}$ olevien tapahtumien suhteen.

Odotusarvoa ja varianssia koskevat tulokset seuraavat lemman 9.6 avulla, kun havaitaan, että $N(t)$ on Poisson-jakautunut parametrilla λt ja näin siis toteuttaa $\mathbb{E}(N(t)) = \mathrm{Var}(N(t)) = \lambda t$. $\square$

Lemma 9.6. *Olkoon $S = \sum_{i=1}^{N} Z_i$, missä satunnaisluvut $Z_1, Z_2, \ldots$ ovat samoin jakautuneita sekä toisistaan ja satunnaisesta kokonaisluvusta N riippumattomia.*

(i) Jos N ja Z_i ovat integroituvia, niin $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(Z_i)$.

(ii) Jos N ja Z_i ovat neliöintegroituvia[12]*, niin*

$$\mathrm{Var}(S) \;=\; \mathbb{E}(N)\,\mathrm{Var}(Z_i) + \mathrm{Var}(N)(\mathbb{E}(Z_i))^2.$$

Todistus. Merkitään $p(n) = \mathbb{P}(N = n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ja muistetaan, että tapahtuman $\{N = 0\}$ vallitessa määritellään summa $\sum_{i=1}^{N} Z_i$ nollaksi. Kaavat voi todistaa ehdollistamalla tapahtuman $\{N = n\}$ suhteen. Yksityiskohtien läpi laskeminen on hyvä harjoitustehtävä. □

Esimerkki 9.7 (Liikennevirta)**.** Jatketaan esimerkin 9.3 analysoimista. Esimerkissä 9.4 havaittiin, että matkustajien kertymä voidaan esittää yhdistettynä Poisson-prosessina $S(t)$, jossa $\lambda = 40$, $m = \mathbb{E}(Z_i) = 1.9$ ja $\sigma^2 = \mathrm{Var}(Z_i) = 1.2$. Lauseen 9.5 mukaan ajanhetkellä $t = 60$

$$\mathbb{E}(S(t)) \;=\; \lambda m t \;=\; 40 \times 1.9 \times 60 \;=\; 4560$$

ja

$$\mathrm{Var}(S(t)) \;=\; \lambda(m^2 + \sigma^2)t \;=\; 40 \times (1.9^2 + 1.2^2) \times 60 \;=\; 12120.$$

Tunnin aikana kuntarajan ylittävien matkustajien $S(60)$ odotusarvo on siis 4560 ja keskihajonta $\sqrt{12120} = 110.09$. Koska malli on ajansuhteen tilastollisesti siirtoinvariantti, sama tulos pätee mille tahansa tunnin mittaiselle tarkasteltavan aikavälin osavälille.

9.4 Poisson-prosessin harventaminen

Kappaleessa 9.2 havaittiin, että riippumattomia Poisson-prosesseja päällekkäin asettelemalla saadaan uusi Poisson-prosessi. Tässä kappaleessa tutustutaan päällekkäin asettelemisen käänteisoperaatioon, joka voidaan toteuttaa tarkasteltavana olevan Poisson-prosessin tapahtumahetkien riippumattomalla harventamisella.

Esimerkki 9.8 (Harvennettu liikennevirta)**.** Länsiväylää pitkin Helsingin ja Espoon välisen kuntarajan ylittää Espoon suuntaan arkipäivisin klo 10–14 keskimäärin 40 autoa minuutissa, joista $p_1 = 30\%$ kääntyy Kehä-I:lle ja loput jatkavat Länsiväylää pitkin länteen. Mallinna Länsiväylää länteen jatkavien autojen liikennevirtoja tilastollisesti. Millä todennäköisyydellä erään tarkasteltavan minuutin aikana kuntarajan ylittää länteen jatkavia autoja enintään 20, kun tiedetään että kyseisellä aikavälillä Kehä-I:lle jatkavia autoja ylittää vähintään 30 autoa?

Kun oletetaan, että autot kääntyvät Kehä-I:lle tai jatkavat länteen toisistaan riippumattomasti, on aikavälillä $[0, t]$ kuntarajan ylittävien

- autojen kokonaislukumäärä $N(t) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} 1(T_i \le t)$,

[12] Satunnaisluku Z on neliöintegroituva, jos $\mathbb{E}(Z^2) < \infty$. Jokainen neliöintegroituva satunnaisluku on integroituva, sillä analyysin keinoin voidaan todistaa, että $\mathbb{E}(|Z|) \le (\mathbb{E}(Z^2))^{1/2}$

- Kehä-I:lle kääntyvien autojen lkm $N_1(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i \, 1(T_i \le t)$,
- länteen jatkavien autojen lkm $N_2(t) = \sum_{i=1}^{\infty} (1-\theta_i) \, 1(T_i \le t)$,

missä $\theta_i \in \{0,1\}$ on indikaattori tapahtumalle, että i:s kuntarajan ylittävä auto kääntyy Kehä-I:lle.

Näin aikaansaatu laskuriprosessi $N_1(t)$ on harvennettu Poisson-prosessi, joka saadaan poistamalla 70% alkuperäisen Poisson-prosessin tapahtumahetkistä riippumattomalla valinnalla. Vastaavasti myös $N_2(t)$ on harvennettu Poisson-prosessi. Seuraava tulos vahvistaa, että riippumattomasti harvennetut Poisson-prosessit ovat Poisson-prosesseja.

Lause 9.9. *Poisson-prosessin $N(t)$ harvennukset $N_1(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i 1(T_i \le t)$ ja $N_2(t) = \sum_{i=1}^{\infty} (1-\theta_i) 1(T_i \le t)$ ovat Poisson-prosesseja ja toisistaan riippumattomia.*

Todistus. Todistetaan ensin, että N_1 on Poisson-prosessi. Selvästi $N_1(0) = 0$. Tarkistetaan seuraavaksi, että $N_1(t)$ on Poisson-jakautunut. Ber(p_1)-jakautuneen indikaattorin θ_i todennäköisyydet generoiva funktio on

$$G_{\theta_i}(z) = \mathbb{E}(z^{\theta_i}) = (1-p_1)z^0 + p_1 z^1.$$

Koska $N_1(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$, voidaan käyttää haarautumisprosessien yhteydessä opittua tulosta, jonka mukaan

$$G_{N_1(t)}(z) = G_{N(t)}(G_{\theta_i}(z)).$$

Tätä hyödyntämällä nähdään, että

$$G_{N_1(t)}(z) = G_{N(t)}(G_{\theta_i}(z)) = e^{\lambda(G_{\theta_i}(z)-1)} = e^{\lambda p_1 (z-1)},$$

josta seuraa, että $N_1(t) =_{\mathrm{st}} \mathrm{Poi}(\lambda p_1)$. Täysin samaan tapaan voidaan tarkistaa, että $N_1(t) - N_1(s) =_{\mathrm{st}} \mathrm{Poi}(\lambda p_1 (t-s))$. Lisäksi, koska $N_1(t)$ on yhdistetty Poisson-prosessi, seuraa lauseesta 9.5, että N_1:llä on riippumattomat muutokset. Näin ollen N_1 on Poisson-prosessi intensiteetillä λp_1. Vastaavaan tapaan nähdään, että N_2 on Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda(1-p_1)$.

Perustellaan vielä lopuksi, miski N_1 ja N_2 ovat riippumattomat. Tapahtuma $\{N_1(s,t] = j, \, N_2(s,t] = k\}$ sattuu täsmälleen silloin, kun välillä $(s,t]$ on $N(s,t] = j+k$ tapahtumaa, joista N_1:een valitaan j ja N_2:een valitaan k. Koska valinnat tehdään toisistaan riippumattomasti, nähdään binomijakaumaa käyttämällä (ja merkitsemällä $p_2 = 1 - p_1$), että

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_1(t) = j, N_2(t) = k) &= \mathbb{P}(N(t) = j+k) \binom{j+k}{j} p_1^j (1-p_1)^k \\
&= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j+k}}{(j+k)!} \binom{j+k}{j} p_1^j p_2^k \\
&= e^{-\lambda p_1 t} \frac{(\lambda p_1 t)^j}{j!} \, e^{-\lambda p_2 t} \frac{(\lambda p_2 t)^k}{k!} \\
&= \mathbb{P}(N_1(t) = j) \, \mathbb{P}(N_2(t) = k).
\end{aligned}$$

Näin ollen Poisson-prosessien N_1 ja N_2 tilat ajanhetkellä t ovat riippumattomat. Tästä ei vielä suoraan seuraa prosessien riippumattomuus, mutta ylläolevaa argumenttia yleistämällä voidaan perustella, että myös satunnaisvektorit $(N_1(t_1), \ldots, N_1(t_n))$ ja $(N_2(t_1), \ldots, N_2(t_n))$ ovat riippumattomat mielivaltaisilla $t_1, \ldots, t_n$, mikä vastaa prosessien riippumattomuutta. □

Lauseen 9.9 tulos, jonka mukaan harvennukset N_1 ja N_2 ovat riippumattomat on ensi alkuun hieman yllättävä, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 9.10 (Harvennettu liikennevirta)**.** Esimerkin 9.8 mallissa Kehä-I:lle kääntyvien autojen ja Länsiväylää länteen jatkavien autojen liikennevirrat ovat lauseen 9.9 perusteella toisistaan riippumattomat. Näin ollen vastaus kysymykseen, millä todennäköisyydellä erään tarkasteltavan minuutin aikana kuntarajan ylittää länteen jatkavia autoja enintään 20, kun tiedetään että kyseisellä aikavälillä Kehä-I:lle jatkavia autoja ylittää vähintään 30 autoa, voidaan esittää muodossa

$$\mathbb{P}(N_2(1) \le 20 \,|\, N_1(1) \ge 30) \;=\; \mathbb{P}(N_2(1) \le 20).$$

Tieto Kehä-I:lle kääntyvistä autoista ei siis kerro mitään länteen päin jatkavista autoista.

Ylläoleva riippumattomuustulos vaikuttaa oudolta, sillä määritelmän mukaan todennäköisyydellä yksi pätee $N_1(t) + N_2(t) = N(t)$ kaikilla $t \ge 0$. Tämä ominaisuus on yksi Poisson-prosessin maagisista erityispiirteistä, joka ei yleisesti päde muuntyyppisille laskuriprosesseille. Itse asiassa lause 9.9 voidaan yleistää usampaan kuin kahteen harvennukseen.

Lause 9.11. *Jos N on Poisson-prosessi intensiteetillä λ, ja $Z_1, Z_2, \ldots$ samoin jakautuneita sekä toisistaan ja N:stä riippumattomia numeroituvan tilajoukon S satunnaislukuja, niin harvennetut prosessit*

$$N_x(t) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} 1(Z_i = x) 1(T_i \le t), \qquad x \in S,$$

ovat riippumattomia Poisson-prosesseja intensiteeteillä $\lambda_x = \lambda \mathbb{P}(Z_i = x)$.

9.5 Uusiutumisprosessit

Esimerkki 9.12 (Bussipysäkki)**.** Bussien saapumishetkien väliajat $\tau_1, \tau_2, \ldots$ oletetaan riippumattomiksi ja samoin jakautuneiksi. Pysäkille saapuu henkilö satunnaisella, bussiliikenteestä riippumattomalla ajanhetkellä. Kauanko bussia pitää odotusarvoisesti odottaa?

Yllämainittu kysymys vaikuttaa luonnolliselta, mutta huolellisempi tarkastelu osoittaa, että se ei ole hyvin määritelty. Yksi tapa tulkita kysymys täsmällisesti on seuraava. Valitaan aika-akselin origoksi ajanhetki $t = 0$ ja olkoon $T_0 \ge 0$ ensimmäisen bussin saapumisaika origosta katsottuna. Tällöin seuraavien bussien saapumishetket saadaan kirjoitettua väliaikojen avulla muodossa

$$T_n \;=\; T_0 + \sum_{i=1}^{n} \tau_i, \quad n \geq 1.$$

Lisäksi oletetaan, että satunnaisluvut $T_0, \tau_1, \tau_2, \dots$ ovat toisistaan riippumattomat. Näin aikaansaadun satunnaisen pistekuvion $\{T_0, T_1, T_2, \dots\}$ laskuriprosessia

$$N(t) \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} 1(T_i \leq t)$$

kutsutaan *uusiutumisprosessiksi*, jonka *alkujakauma* on T_0:n jakauma ja *väliaikajakauma* on τ_i:n jakauma.

Esimerkki 9.13 (Poisson-prosessi)**.** Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda > 0$ on uusiutumisprosessi, jonka alkujakauma on $\mathrm{Exp}(\lambda)$ ja väliaikajakauma on $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

Esimerkki 9.14 (Tuntemattoman vaiheen jaksollinen pistekuvio)**.** Olkoon $T_n = T_0 + n$ kaikilla $n \geq 0$, missä $T_0 =_{\mathrm{st}} \mathrm{Tas}(0,1)$ välillä $(0,1)$ tasajakautunut satunnaisluku. Pistekuvion $\{T_0, T_1, \dots\}$ laskuriprosessi on tällöin uusiutumisprosessi, jonka alkujakauma on $\mathrm{Tas}(0,1)$ ja väliaikajakauma Dirac-jakauma pisteessä 1.

Esimerkissä 9.12 voidaan bussien saapumishetket tulkita uusiutumisprosessiksi, jolla on väliajat $\tau_1, \tau_2, \dots$ ja tuntematon alkujakauma. Jos bussiliikenteen oletetaan olleen toiminnassa pitkän aikaa ennen pysäkille saapuvaa satunnaista matkustajaa, voidaan intuitiivisesti ajatella, että alkujakauman merkitys on vähäinen. Seuraava tulos vahvistaa tämän tapahtumahetkien aikakeskiarvon näkökulmasta.

Lause 9.15. *Jos väliaikojen odotusarvo $m = \mathbb{E}(\tau_i)$ on äärellinen ja aidosti positiivinen, niin uusiutumisprosessille pätee todennäköisyydellä yksi*

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{m}, \quad \textit{kun } t \to \infty,$$

alkujakaumaan katsomatta.

Todistus. Koska väliajat ovat riippumattomat, seuraa vahvaa suurten lukujen lakia käyttämällä, että $n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \tau_i \to m$ tn:llä yksi ja näin ollen myös $T_n/n \to m$ tn:llä 1. Lisäksi ominaisuutta

$$N(t) \leq n \quad \Longleftrightarrow \quad T_n > t$$

käyttämällä voidaan päätellä, että $N(t) \to \infty$ tn:llä 1 ja

$$T_{N(t)-1} \leq t < T_{N(t)} \tag{9.2}$$

kaikilla $t \geq T_0$ (kannattaa piirtää kuva uusiutumisprosessin polusta). Koska $T_n/n \to m$ ja $N(t) \to \infty$ todennäköisyydellä yksi, niin todennäköisyydellä yksi pätee myös

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \to m \quad \text{ja} \quad \frac{T_{N(t)}}{N(t)-1} \to m.$$

Jakamalla epäyhtälöiden (9.2) kaikki termit luvulla $N(t)$ voidaan tästä päätellä, että $t/N(t) \to m$, josta väite seuraa. □

Ajanhetkestä $s \geq 0$ katsottuna välimatkat uusiutumisprosessin edelliseen ja seuraavaan tapahtumahetkeen voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \tau_-(s) &= s - T_{N(s)-1}, \\ \tau_+(s) &= T_{N(s)} - s. \end{aligned}$$

Tapahtuman $N(s) = 0$ vallitessa määritellään $\tau_-(s) = \infty$. Tällöin ajanhetkestä s katsottuna uusiutumisprosessin seuraavan ja edellisen tapahtumahetken väliaika on

$$\tau_*(s) = \tau_+(s) - \tau_-(s).$$

Äärettömältä aikaväliltä $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ ei voi valita pistettä tasaisen satunnaisesti, sillä mikään vakiofunktio ei toteuta ehtoa $\int_0^\infty f(u)\,du = 1$. Pitkältä aikaväliltä $[0, s]$ voidaan kuitenkin valita tasaisen satunnaisesti ja uusiutumisprosessista riippumattomasti ajanhetki U_s ja sen jälkeen tarkastella tilannetta, kun $s \to \infty$. Ajanhetken U_s näkökulmasta todennäköisyys, että välimatka seuraavaan uusiutumisprosessin tapahtumahetkeen on enintään t, on

$$\mathbb{P}(\tau_+(U_s) \leq t) = \frac{1}{s} \int_0^s \mathbb{P}(\tau_+(u) \leq t)\,du.$$

Vastaavaan tapaan voidaan kirjoittaa satunnaislukujen $\tau_-(U_s)$ ja $\tau_*(U_s)$ kertymäfunktiot. Seuraava tulos on eräs versio uusiutumislauseena tunnetusta tuloksesta.

Lause 9.16. *Uusiutumisprosessille, jonka väliajat toteuttavat $\mathbb{E}(\tau_i) \in (0, \infty)$ ja $\mathbb{P}(\tau_i > 0) = 1$, pätee alkujakaumaan katsomatta*

$$\lim_{s\to\infty} \mathbb{P}(\tau_+(U_s) \leq t) = \lim_{s\to\infty} \mathbb{P}(\tau_-(U_s) \leq t) = \mathbb{P}(\tau_+ \leq t),$$

ja

$$\lim_{s\to\infty} \mathbb{P}(\tau_*(U_s) \leq t) = \mathbb{P}(\tau_* \leq t),$$

missä ei-negatiivisten satunnaislukujen τ_+ ja τ_* kertymäfunktiot saadaan laskettua väliaikajakaumasta kaavoilla

$$\mathbb{P}(\tau_+ \leq t) = \frac{\mathbb{E}(\tau_i \wedge t)}{\mathbb{E}(\tau_i)} \quad \text{ja} \quad \mathbb{P}(\tau_* \leq t) = \frac{\mathbb{E}(\tau_i 1(\tau_i \leq t))}{\mathbb{E}(\tau_i)}. \tag{9.3}$$

Todistus. Todistus saattaa ilmestyä luentomonisteen tulevissa versioissa. Sen voi myös lukea kirjasta [Asm03, Luku V.4]. □

Kaavassa (9.3) esiintyvän satunnaisluvun τ_+ jakaumaa kutsutaan uusiutumisprosessin *tasapainojakaumaksi*. Nimitys johtuu siitä, että valitsemalla uusiutumisprosessin ensimmäiseksi tapahtumahetkeksi $T_0 = \tau_+$ voidaan näyttää, että satunnainen pistekuvio $\{T_0, T_1, T_2, \dots\}$ on tasakoosteinen. Hyödyntämällä yhtälöä $\tau_i \wedge t = \int_0^t 1(s < \tau_i)\,ds$ voidaan tasapainojakauma voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbb{P}(\tau_+ \le t) \;=\; \frac{\mathbb{E}\int_0^t 1(s < \tau_i)\,ds}{\mathbb{E}(\tau_i)} \;=\; \int_0^t \frac{\mathbb{P}(\tau_i > s)}{\mathbb{E}(\tau_i)}\,ds,$$

josta nähdään, että uusiutumisprosessin tasapainojakaumalla on olemassa tiheysfunktio

$$f_+(t) \;=\; \frac{\mathbb{P}(\tau_i > t)}{\mathbb{E}(\tau_i)}, \quad t \ge 0. \tag{9.4}$$

Kaavan (9.3) satunnaisluvun τ_* jakauma on satunnaisluvun τ_i:n *kokovinoutettu jakauma*. Kokovinoutetulla jakaumalla ei aina ole tiheysfunktiota. Jos uusiutumisprosessin väliaikajakaumalla on tiheysfunktio f, niin tällöin myös kokovinoutetulla jakaumalla on tiheysfunktio, joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$f_*(t) \;=\; \frac{tf(t)}{\int_0^\infty sf(s)\,ds}. \tag{9.5}$$

Tasapainojakaumaa ja kokovinoutettua jakaumaa vastaavat odotusarvot voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbb{E}(\tau_+) \;=\; \frac{\mathbb{E}(\tau_i^2)}{2\mathbb{E}(\tau_i)} \quad \text{ja} \quad \mathbb{E}(\tau_*) \;=\; \frac{\mathbb{E}(\tau_i^2)}{\mathbb{E}(\tau_i)}.$$

Kaikille ei-negatiivisille satunnaisluvuille voimassa olevaa epäyhtälöä $\mathbb{E}(\tau_i) \le (\mathbb{E}(\tau_i^2))^{1/2}$ käyttämällä nähdään, että

$$\mathbb{E}(\tau_*) \;\ge\; \mathbb{E}(\tau_i). \tag{9.6}$$

Epäyhtälö (9.6) on *tutkintaparadoksin* eräs versio ja se kertoo, että satunnaisella ajanhetkellä uusiutumisprosessia havainnoiva henkilö havaitsee uusiutumisprosessin tapahtumahetkien väliajaksi tyypillisesti isomman väliajan, kuin mitä väliaikajakauman odotusarvo $\mathbb{E}(\tau_i)$ antaisi odottaa. Tämä johtuu siitä, että satunnainen havainnoija todennäköisemmin osuu aikavälille, jonka väliaika on tyypillistä aikaväliä isompi.

Esimerkki 9.17 (Bussipysäkki)**.** Oletetaan, että esimerkissä 9.12 bussien saapumisajat ovat riippumattomasti ja tasaisesti sironneita, jolloin väliajat τ_i ovat eksponenttijakauneita vauhtiparametrilla $\lambda > 0$. Esimerkiksi $\lambda = 0.1$ (per min) vastaa tilannetta, jossa busseja saapuu pysäkille keskimäärin 10 min välein. Tällöin kaavan (9.4) mukaan uusiutumisprosessin tasapainojakauman tiheysfunktio saadaan kaavasta

$$f_+(t) \;=\; \frac{\mathbb{P}(\tau_i > t)}{\mathbb{E}(\tau_i)} \;=\; \frac{e^{-\lambda t}}{1/\lambda} \;=\; \lambda e^{-\lambda t}$$

ja kaavan (9.5) mukaan kokovinoutetun jakauman tiheysfunktio on

$$f_*(t) \;=\; \frac{tf(t)}{\int_0^\infty sf(s)\,ds} \;=\; \frac{\lambda t e^{-\lambda t}}{1/\lambda} \;=\; \lambda^2 e^{-\lambda t}.$$

Näistä voidaan tunnistaa, että τ_+ noudattaa eksponenttijakaumaa $\mathrm{Exp}(\lambda)$ vauhtiparametrilla λ, ja τ_* noudattaa gammajakaumaa $\mathrm{Gam}(2, \lambda)$ muotoparametrilla 2 ja vauhtiparametrilla λ. Lauseen 9.16 mukaan satunnaisella bussiliikenteestä riippumattomalla ajanhetkellä saapuvan henkilön havaitsema odotusarvoinen aika seuraavan bussin saapumiseen on $\mathbb{E}(\tau_+) = 1/\lambda = 10$ minuuttia. Lisäksi satunnaisesti pysäkille saapuvan henkilön näkökulmasta edellisen ja seuraavan bussin väliaika on odotusarvoisesti $\mathbb{E}(\tau_*) = 2/\lambda = 20$ minuuttia.

$\mathrm{Gam}(2, \lambda)$-jakautunut satunnaisluku τ_* voidaan myös esittää muodossa

$$\tau_* \ = \ \tau_- + \tau_+,$$

missä τ_- ja τ_+ ovat riippumattomia ja $\mathrm{Exp}(\lambda)$-jakautuneita. Tämä on luonnollista, sillä eksponenttijakauman muistittomuusominaisuuden perusteella Poisson-prosessissa välimatkat mistä tahansa deterministisestä ajanhetkestä edelliseen ja seuraavaan ajanhetkeen ovat riippumattomia ja $\mathrm{Exp}(\lambda)$ jakautuneita.

10 Jatkuvan aikavälin stokastiset mallit

10.1 Jatkuvan aikavälin Markov-ketju

Jatkuvan aikavälin $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ *Markov-ketju* numeroituvassa tilajoukossa S on satunnaisprosessi (X_t), joka h:n aikayksikön kuluessa kulkee tilasta x tilaan y todennäköisyydellä $P_h(x, y)$ aiemmista tiloista riippumatta. Tarkemmin ilmaistuna

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = y \mid X_t = x, H_{t-}) \;=\; \mathbb{P}(X_{t+h} = y \mid X_t = x) \;=\; P_h(x, y) \tag{10.1}$$

kaikille $x, y \in S$ sekä kaikille muotoa

$$H_{t-} \;=\; \{X_{t_0} = x_0, \ldots, X_{t_n} = x_n\} \tag{10.2}$$

oleville tapahtumille s.e. $0 \le t_0 < \cdots < t_n < t$ ja $\mathbb{P}(X_t = x, H_{t-}) > 0$. Tämä määritelmä on luonteeltaan sama kuin diskreetin aikavälin Markov-ketjulle luvussa 2. Nyt ei kuitenkaan enää riitä tarkastella ainoastaan yhden aika-askeleen mittaisia siirtymiä, vaan pitää lähtökohtaisesti pitää kirjaa mielivaltaisen pienellä (tai suurella) aikavälillä tapahtuvista siirtymistä. Äärellisen tai numeroituvasti äärettömän tilajoukon S indeksoimaa matriisia $P_h = (P_h(x, y) : x, y \in S)$ kutsutaan Markov-ketjun h:n aikayksikön siirtymämatriisiksi. Matriisin P_h alkiot ovat ei-negatiivisia ja rivisummat ovat ykkösiä eli pätee

$$\sum_{y \in S} P_h(x, y) = 1 \quad \text{kaikilla } x \in S.$$

Markov-ketjun tilaa ajanhetkellä t merkitään joko X_t tai $X(t)$.

Kaavan (10.1) määrittelemä Markov-ominaisuus voidaan tulkita niin, että satunnaismuuttuja X_{t+h} on riippumaton satunnaisvektorista $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ ehdolla X_t. Tätä merkitään lyhyesti kirjoittamalla

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \;\perp\!\!\!\perp_{X_t}\; X_{t+h}.$$

Kehittyneemmillä todennäköisyysteorian tekniikoilla voidaan perustella [Kal02, Lemma 8.1], että jatkuvan aikavälin Markov-ketjulle pätee myös laajennettu Markov-ominaisuus

$$(X_s : s \le t) \;\perp\!\!\!\perp_{X_t}\; (X_u : u \ge t), \tag{10.3}$$

eli Markov-ketjun kaikki tulevaisuuden arvot ajanhetkestä t eteenpäin ovat ehdollisesti riippumattomia ketjun menneistä arvoista, kun ketjun tila ajanhetkellä t tunnetaan.

Esimerkki 10.1 (Satelliitti)**.** Erään avaruuteen laukaistun satelliitin toiminta-aika T noudattaa $\mathrm{Exp}(\mu)$-jakaumaa odotusarvonaan $1/\mu = 10$ vuotta. Kun satelliitti rikkoutuu, sitä ei enää korjata. Satelliittin tilaa voidaan kuvailla tilajoukon $\{0,1\}$ stokastisena prosessina

$$X_t \;=\; \begin{cases} 1, & \text{jos satelliitti toimii hetkellä } t, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Tutkitaan seuraavaksi, onko (X_t) Markov-ketju. Valitaan luvut $t, h \geq 0$ ja jokin muotoa (10.2) oleva tapahtuma H_{t-}. Tarkastellaan ensiksi todennäköisyyttä

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = 1 \,|\, X_t = 1, H_{t-}),$$

joka voidaan tulkita todennäköisyytenä, että satelliitti toimii hetkellä $t+h$ ehdolla, että satelliitti toimii hetkellä t. Tapahtuman $\{X_t = 1\}$ sattuessa H_{t-} on mahdollinen vain, jos se on muotoa $H_{t-} = \{X_{t_0} = 1, \dots, X_{t_n} = 1\}$, jolloin H_{t-} sisältyy tapahtumaan $\{X_t = 1\}$. Koska $X_t = 1$ täsmälleen silloin, kun $T > t$, voidaan eksponttijakauman muistittomuutta käyttämällä päätellä, että

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t+h} = 1 \,|\, X_t = 1, H_{t-}) \;&=\; \mathbb{P}(X_{t+h} = 1 \,|\, X_t = 1) \\ &=\; \mathbb{P}(T > t+h) \,|\, T > t) \\ &=\; \mathbb{P}(T > t) \\ &=\; e^{-\mu h}. \end{aligned}$$

Vastakohdan todennäköisyyttä käyttämällä puolestaan havaitaan, että

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = 0 \,|\, X_t = 1, H_{t-}) \;=\; 1 - e^{-\mu h}.$$

Koska rikkoutunut satelliitti pysyy rikkoutuneena,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t+h} = 1 \,|\, X_t = 0, H_{t-}) \;&=\; 0, \\ \mathbb{P}(X_{t+h} = 0 \,|\, X_t = 0, H_{t-}) \;&=\; 1. \end{aligned}$$

Kokoamalla ylläolevan havainnot yhteen, voidaan päätellä, että (X_t) on jatkuva-aikainen tilajoukon $\{0,1\}$ Markov-ketju siirtymämatriiseinaan

$$P_h \;=\; \begin{bmatrix} P_h(0,0) & P_h(0,1) \\ P_h(1,0) & P_h(1,1) \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - e^{-\mu h} & e^{-\mu h} \end{bmatrix}, \qquad h \geq 0.$$

Esimerkki 10.2 (Poisson-prosessi)**.** Olkoon $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ Poisson-prosessi intensiteetillä $\alpha > 0$. Koska (N_t):n tapahtumahetkien muodostama satunnainen pistekuvio on riippumattomasti ja tasaisesti sironnut, voidaan päätellä, että mielivaltaiselle muotoa $H_{t-} = \{N_{t_0} = i_0, \dots, N_{t_n} = i_n\}$ olevalle tapahtumalle, missä $t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t$, pätee

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{t+h} = j \,|\, N_t = i, H_{t-}) \;&=\; \mathbb{P}(N_{t+h} = j \,|\, N_t = i, N_{t_n} = i_n, \dots, N_{t_0} = i_0) \\ &=\; \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = j - i \,|\, N_t = i, N_{t_n} = i_n, \dots, N_{t_0} = i_0) \\ &=\; \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = j - i) \\ &=\; \mathbb{P}(N_h = j - i). \end{aligned}$$

Näin ollen satunnaisprosessi (N_t) on jatkuva-aikainen tilajoukon $\mathbb{Z}_+$ Markov-ketju siirtymämatriiseinaan

$$P_h(i,j) = \begin{cases} e^{-\alpha h}\frac{(\alpha h)^{j-i}}{(j-i)!}, & j \geq i, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

10.2 Hyppyvauhti

Jatkuva-aikaisen Markov-ketjun *ensimmäistä hyppyhetkeä* merkitään

$$T \;=\; \min\{t \geq 0 : X_t \neq X_0\}, \tag{10.4}$$

missä tulkitaan $T = \infty$, mikäli (X_t) ei koskaan poistu alkutilastaan.[13] Satunnaisluku $T \in [0, \infty]$ siis kertoo, milloin Markov-ketju ensimmäisen kerran siirtyy pois alkutilastaan. Ketjun *hyppyvauhti* tilassa x on

$$\lambda(x) \;=\; \frac{1}{\mathbb{E}_x(T)},$$

missä $\mathbb{E}_x$ tarkoittaa odotusarvoa tilasta x käynnistyvälle ketjulle, ja tulkitaan $\lambda(x) = 0$ silloin, kun $\mathbb{E}_x(T) = \infty$.

Seuraava tulos kertoo, että jatkuva-aikainen Markov-ketju viettää jokaisessa tilassa satunnaisen ajan, joka noudattaa eksponenttijakaumaa. Tässä yhteydessä laajennetaan eksponenttijakauman käsitettä niin, että satunnaisluku $T \in [0, \infty]$ noudattaa eksponenttijakaumaa $\mathrm{Exp}(0)$, mikäli $T = \infty$ todennäköisyydellä yksi.

Lause 10.3. *Tilasta x käynnistyvän Markov-ketjun (X_t) ensimmäinen hyppyhetki T noudattaa eksponenttijakaumaa* $\mathrm{Exp}(\lambda(x))$ *vauhtiparametrilla* $\lambda(x)$.

Todistus. Laajennettua Markov-ominaisuutta (10.3) käyttämällä havaitaan, että

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T > t+h \,|\, T > t) &= \mathbb{P}(X_u = x \ \forall u \in [t, t+h] \ | \ X_s = x \ \forall s \in [0,t]) \\ &= \mathbb{P}(X_u = x \ \forall u \in [t, t+h] \ | \ X_t = x) \\ &= \mathbb{P}(X_u = x \ \forall u \in [0, h] \ | \ X_0 = x) \\ &= \mathbb{P}(T > h). \end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa, että satunnaisluvun T jakauma on muistiton. Tästä seuraa, että funktio $\phi(t) = \mathbb{P}(T > t)$ toteuttaa $\phi(t+h) = \phi(t)\phi(h)$ kaikilla $t, h \geq 0$. Koska selvästi ϕ on vähenevä, voidaan päätellä että

$$\phi(t) = e^{-\lambda t}$$

[13] Luentomonisteessa noudatetaan käytäntöä, että prosessin tila hyppyhetkellä on se tila, johon prosessi hyppää kyseisellä hetkellä. Tällöin kaikki jatkuvan aikavälin prosessit ovat oikealta jatkuvia, ja kaavan (10.4) minimi saavutetaan aina kun prosessi joskus vaihtaa tilaansa.

jollain $\lambda \in [0, \infty)$. Tapauksessa $\lambda > 0$ näin ollen T noudattaa eksponenttijakaumaa $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Tapauksessa $\lambda = 0$ puolestaan

$$\mathbb{P}(T = \infty) \; = \; \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \{T > n\} \right) \; = \; \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(T > n) \; = \; 1,$$

mikä vastaa eksponenttijakaumaa vauhtiparametrilla 0. □

10.3 Hyppytodennäköisyydet ja siirtymäkaavio

Lauseen 10.3 avulla voidaan luonnehtia yleisen jatkuva-aikaisen Markov-ketjun käyttäytyminen yleisessä numeroituvassa tilajoukossa S. Tilasta x käynnistyvä ketju:

- viettää satunnaisen $\mathrm{Exp}(\lambda(x))$-jakautuneen ajan tilassa x,
- hyppää tilasta x tilaan y todennäköisyydellä $P_*(x, y)$,
- viettää satunnaisen $\mathrm{Exp}(\lambda(y))$-jakautuneen ajan tilassa y,
- hyppää tilasta y tilaan z todennäköisyydellä $P_*(y, z)$,
- ...

Ketju jatkaa ylläkuvattua vaellusta niin kauan kuin ketju kulkee tiloissa, joiden hyppyvauhti on nollasta poikkeava. Mikäli ketju joskus osuu absorboivaan tilaan x, jonka hyppyvauhti $\lambda(x) = 0$, jää ketju tilaan x ikiajoiksi.

Luku $P_*(x, y)$ kertoo, millä todennäköisyydellä ketju tilasta x pois hypätessään päätyy tilaan y. Markov-ominaisuuden perusteella jokaisen hypyn kohdetila on riippumaton ketjun menneisyydestä. Lukuja $P_*(x, y)$ kutsutaan jatkuva-aikaisen ketjun *hyppytodennäköisyyksiksi* ja niiden kokoelma voidaan tulkita tilajoukon S indeksoimana neliömatriisina P_*. Tälle matriisille pätee $P_*(x, y) \geq 0$ kaikilla $x, y \in S$ ja

$$\sum_{y \in S} P_*(x, y) = 1 \quad \text{kaikilla } x \in S.$$

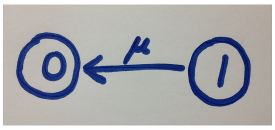
Matriisi P_* on siis tilajoukon siirtymämatriisi. Tämän siirtymämatriisin diagonaalialkiot ovat nollia, sillä määritelmän mukaan hyppyhetken tapahtuessa ketju vaihtaa tilaansa. Absorboivalle tilalle x, jonka hyppyvauhti on $\lambda(x) = 0$, on tapana määritellä hyppytodennäköisyydet muodossa $P_*(x, y) = 1(x = y)$, vaikka näillä ei olekaan merkitystä ketjun käyttäytymiseen.

Jatkuva-aikaisen Markov-ketjun *siirtymäkaavio* on suunnattu verkko, jonka solmuina ovat ketjun tilat ja linkkeinä $x \to y$ järjestetyt solmuparit, joille $\lambda(x) P_*(x, y) > 0$ eli ketju voi yhdellä hypyllä siirtyä tilasta x tilaan y. Jatkuva-aikainen Markov-ketju on *yhtenäinen*, jos ketjun siirtymäkaavio on vahvasti yhtenäinen suunnattu verkko, eli jokaisen solmuparin välillä on olemassa polku $x \rightsquigarrow y$ ja polku $y \rightsquigarrow x$.

Esimerkki 10.4 (Satelliitti)**.** Esimerkin 10.1 hyppyvauhdit ovat $\lambda(0) = 0$ ja $\lambda(1) = \mu$. Rikkoutunutta satelliittia kuvaava tila 0 on siis absoroiboiva. Ketjun hyppytodennäköisyydet voidaan kirjoittaa tilajoukon $S = \{0, 1\}$ indeksoimana matriisina muodossa

$$P_* = \begin{bmatrix} P_*(0,0) & P_*(0,1) \\ P_*(1,0) & P_*(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ketjun siirtymäkaavio on piirretty kuvaan 5.

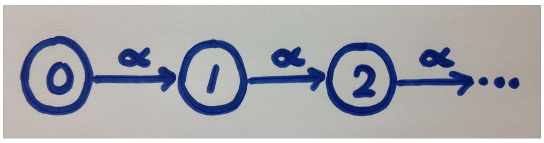


Kuva 5: Satelliittin toimintaa kuvaavan ketjun siirtymäkaavio.

Esimerkki 10.5 (Poisson-prosessi)**.** Vauhdin $\alpha > 0$ Poisson-prosessin (esimerkki 10.2) hyppyvauhdit ovat $\lambda(x) = \alpha$ kaikilla $x = 0, 1, \dots$ ja hyppytodennäköisyydet ovat

$$P_* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Ketjun siirtymäkaavio on piirretty kuvaan 6.



Kuva 6: Poisson-prosessin siirtymäkaavio.

10.4 Muistiton juoksukilpailu

Yksinkertaisimmissa jatkuvan aikavälin Markov-ketjuissa voidaan hyppytodennäköisyydet määrittää helposti. Vähänkään mutkikkaammissa malleissa tulee analysoida, mikä useista mahdollisista vaihtoehdoista toteutuu milläkin todennäköisyydellä. Usein tämä analyysi voidaan palauttaa seuraavaan kilpajuoksutilanteeseen.

Joukko kilpailijoita $i \in I$ juoksee kilpaa satunnaisella vauhdilla. Oletetaan, että kilpailijan i maaliintuloaika T_i noudattaa eksponenttijakaumaa $\mathrm{Exp}(\lambda_i)$ vauhtiparametrilla $\lambda_i > 0$. Lisäksi oletetaan, että kilpailijoiden maaliintuloajat ovat toisistaan riippumattomat. Kilpailun voittoaika on tällöin

$$T_{\min} \;=\; \min_{i \in I} T_i$$

ja kilpailun voittajan indeksi on

$$I_{\min} \;=\; \arg\min_{i \in I} T_i.$$

Lauseen A.1 mukaan maalintuloajat ovat erilliset todennäköisyydellä yksi ja näin ollen kilpailun voittaja on yksikäsitteisesti määritelty.

Seuraava hieman yllättävä tulos kertoo, että muistittomassa juoksukilpailussa esim. tieto siitä, että hitaimman vauhtiparametrin omaava kilpailija voittaa kilpailun, ei kerro mitään voittoajasta. Tämä eksponenttijakauman maaginen ominaisuus ei yleensä pidä paikkaansa muille jakaumille.

Lause 10.6. *Kun $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i < \infty$ (esim. kun I on äärellinen), $T_{\min}$ noudattaa $\mathrm{Exp}(\lambda)$-jakaumaa vauhtiparametrilla λ, $I_{\min}$ noudattaa jakaumaa*

$$\mathbb{P}(I_{\min} = i) \;=\; \frac{\lambda_i}{\lambda}, \quad i \in I,$$

ja lisäksi satunnaismuuttujat $T_{\min}$ ja $I_{\min}$ ovat toisistaan riippumattomat.

Todistus. Selvitetään ensiksi voittoajan jakauma. Koska

$$\mathbb{P}(T_{\min} > t) \;=\; \mathbb{P}(T_i > t \text{ kaikilla } i \in I) \;=\; \prod_{i \in I} e^{-\lambda_i t} \;=\; e^{-\lambda t},$$

voidaan päätellä, että $T_{\min} =_{\mathrm{st}} \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Kilpailija i voittaa täsmälleen silloin, kun $T_i < T'$, missä satunnaisluku $T' = \min_{j \neq i} T_j$ kertoo i:n kilpakumppanien parhaimman ajan. Edellisen kohdan perusteella $T' =_{\mathrm{st}} \mathrm{Exp}(\lambda')$, missä $\lambda' = \sum_{j \neq i} \lambda_j$. Koska selvästikin T_i ja T' ovat toisistaan riippumattomat, huomataan, että

$$\mathbb{P}(T_{\min} > t, I_{\min} = i) \;=\; \mathbb{P}(T_i > t, T_i < T').$$

Kirjoittamalla oikealla puolella oleva todennäköisyys muodossa

$$\mathbb{P}(T_i > t, T_i < T') \;=\; \mathbb{E}h(T_i, T'),$$

missä $h(t_i, t') = 1(t_i > t)1(t_i < t')$, huomataan satunnaislukujen T_i ja T' riippumattomuuden perusteella, että

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_i > t, T_i < T') &= \int_0^\infty \int_0^\infty h(t_i, t') \lambda_i e^{-\lambda_i t_i} \; \lambda' e^{-\lambda' t'} dt_i dt' \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty 1(t_i > t) 1(t_i < t') \lambda_i e^{-\lambda_i t_i} \; \lambda' e^{-\lambda' t'} dt_i dt' \\ &= \int_0^\infty 1(t_i > t) \lambda_i e^{-\lambda_i t_i} \; \left(\int_{t_i}^\infty \lambda' e^{-\lambda' t'} dt' \right) dt_i \\ &= \int_0^\infty 1(t_i > t) \lambda_i e^{-\lambda_i t_i} \; e^{-\lambda' t_i} dt_i \\ &= \int_t^\infty \lambda_i e^{-\lambda t_i} dt_i \\ &= \frac{\lambda_i}{\lambda} e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

Tästä voidaan päätellä, että

$$\mathbb{P}(T_{\min} > t, I_{\min} = i) \;=\; \mathbb{P}(T_{\min} > t) \frac{\lambda_i}{\lambda}.$$

Sijoittamalla ylläolevaan kaavaan $t = 0$ huomataan, että $\mathbb{P}(I_{\min} = i) = \frac{\lambda_i}{\lambda}$. Tämän jälkeen voidaan ylläolevaa kaava kirjoittaa uudelleen muodossa

$$\mathbb{P}(T_{\min} > t, I_{\min} = i) \;=\; \mathbb{P}(T_{\min} > t) \, \mathbb{P}(I_{\min} = i),$$

josta voidaan päätellä satunnaismuuttujien $T_{\min}$ ja $I_{\min}$ riippumattomuus. □

Esimerkki 10.7 (Kahden koneen ylläpito)**.** Tehtaassa on kaksi konetta, joista kumpikin toimii odotusarvoisesti $1/\lambda = 40$ viikkoa. Kummankin koneen korjaaminen vie odotusarvoisesti $1/\mu = 2$ viikkoa. Toiminta- ja korjausajat oletetaan eksponenttijakautuneiksi ja toisistaan riippumattomiksi. Merkitään

$$X_t \;=\; \text{rikkinäisten koneiden lkm hetkellä } t.$$

Tutkitaan, onko (X_t) Markov-ketju. Tämä voidaan tehdä niin, että käydään yksi kerrallaan läpi mahdolliset alkutilat ja katsotaan, miten ensimmäinen hyppy tapahtuu.

Tila 0 vastaa tilannetta, jossa molemmat koneet ovat toiminnassa. Olkoon koneen i toiminta-aika $L_i =_{\mathrm{st}} \mathrm{Exp}(\lambda_i)$, $i = 1, 2$. Tällöin tilasta 0 käynnistyvän ketjun ensimmäinen hyppyhetki on $T = L_1 \wedge L_2$. Lauseen 10.6 avulla nähdään, että $T =_{\mathrm{st}} \mathrm{Exp}(2\lambda)$. Hyppyhetkellä toinen koneista rikkoutuu ja ketju siirtyy tilaan 1. Tärkeä havainto on nyt huomata, että hyppyhetken tapahduttua ehjänä olevan koneen jäljellä oleva toiminta-aika on eksponenttijakauman muistittomuuden nojalla noudattaa samaa $\mathrm{Exp}(\lambda)$-jakaumaa, mitä alkutilassakin. Näin ollen ensimmäisen hyppyhetken jälkeen prosessi (X_t) käyttäytyy aivan kuten se olisi juuri käynnistetty tilasta 1.

Tila 1 vastaa tilannetta, jossa toinen kone toimii ja toinen on rikki. Numeroidaan koneet tarvittaessa uudelleen niin, että ehjän koneen numero on 1. Tällöin ehjän koneen jäljellä oleva toiminta-aika L_1 noudattaa Exp(λ)-jakaumaa, ja rikkinäisen koneen korjausaika M_2 on Exp(μ)-jakautunut. Se, mitä systeemissä seuraavaksi tapahtuu, riippuu siitä, onko $L_1 < M_2$ vai $L_1 > M_2$ (yhtäsuuruuden todennäköisyys on nolla).

- Jos $L_1 < M_2$, niin kone 1 rikkoutuu ennen kuin kone 2 ehditään korjata, jolloin systeemi siirtyy tilaan 2. Jos näin käy, niin tällöin rikkoutumishetken jälkeen on koneen 2 jäljellä oleva korjausaika yhä Exp(μ)-jakautunut, jakauman muistittomuuden perusteella. Näin ollen rikkoutumisen jälkeen systeemi käyttäytyy aivan kuten tilasta 2 juuri käynnistetty prosessi.

- Jos $L_1 > M_2$, niin kone 2 ehditään korjata ennen koneen 1 rikkoutumista. Tällöin systeemi siirtyy tilaan 0 ja käyttäytyy aivan kuten prosessi olisi juuri käynnistetty tilasta 0.

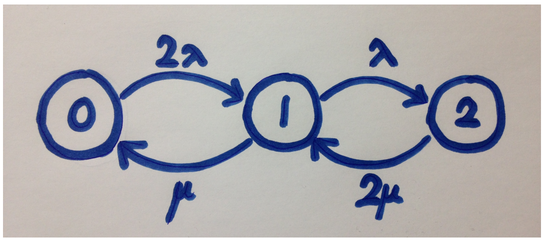
Se, kumpi ylläolevista vaihtoehdoista realisoituu, vastaa kahden kilpailijan muistitonta juoksukilpailua. Lauseen 10.6 mukaan juoksukilpailun voittoaika eli tilasta 1 käynnistyvän prosessin ensimmäinen hyppyhetki noudattaa Exp($\lambda + \mu$)-jakaumaa ja tämän satunnaisajan pituudesta riippumatta prosessi hyppää hyppyhetkellä tilaan 0 todennäköisyydellä $\mu/(\lambda+\mu)$ ja tilaan 2 todennäköisyydellä $\lambda/(\lambda+\mu)$.

Tila 2 puolestaan vastaa tilannetta, jossa molemmat koneet ovat rikki. Koneiden korjausajat ovat riippumattomat ja Exp(μ)-jakautuneet, joten tilasta 2 käynnistyvän prosessin ensimmäinen hyppyhetki noudattaa Exp(2μ)-jakaumaa ja tällä hetkellä prosessi hyppää tilaan 1. Kuten edellä, tässäkin tapauksessa prosessin käyttäytyminen hyppyhetken jälkeen vastaa tilastollisesti samaa kuin mitä tilasta 1 juuri käynnistyvän prosessin.

Kokoamalla ylläolevat tarkastelut yhteen voidaan, todeta, että (X_t) on tilajoukon $S = \{0,1,2\}$ jatkuva-aikainen Markov-ketju, jonka hyppyvauhdit ovat $\lambda(0) = 2\lambda$, $\lambda(1) = \lambda + \mu$, $\lambda(2) = 2\mu$ ja hyppytodennäköisyydet ovat

$$P_* = \begin{bmatrix} P_*(0,0) & P_*(0,1) & P_*(0,2) \\ P_*(1,0) & P_*(1,1) & P_*(1,2) \\ P_*(2,0) & P_*(2,1) & P_*(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ketjun siirtymäkaavio on piirretty kuvaan 7.



Kuva 7: Kahden koneen toimintaa kuvaavan ketjun siirtymäkaavio.

11 Jatkuva-aikaisten Markov-ketjujen analyysi

11.1 Siirtymämatriisien laskeminen ylikellottamisella

Jatkuvan aikavälin Markov-ketju määriteltiin kappaleessa 10.3 hyppyvauhtien $\lambda(x)$ ja hyppytodennäköisyyksien $P_*(x, y)$ avulla. Tämä määrittely on näyttää kuitenkin täysin erilaiselta määritelmään (10.1) verrattuna, jossa puhuttiin h:n aikayksikön siirtymätodennäköisyyksistä $P_h(x, y)$. Tässä kappaleessa tutkitaan, miten Markov-ketjun hetkittäiset tilajakaumat voidaan määrittää hyppyvauhdeista ja hyppytodennäköisyyksistä. Tarkastellaan ensiksi tapausta, jossa hyppyvauhti on vakio, jolloin tähän kysymykseen on helpompi vastata.

11.1.1 Vakio hyppyvauhti

Tarkastellaan jatkuva-aikaista Markov-ketjua (X_t), joka viettää jokaisessa tilassa satunnaisen Exp(α)-jakautuneen ajan, ja sen jälkeen menneisyydestä riippumatta hyppää tilasta x tilaan y todennäköisyydellä $P_*(x, y)$. Tämän ketjun hyppyvauhti $\alpha > 0$ säilyy siis koko ajan vakiona.

Merkitään ketjun hyppyhetkiä $\{T_1, T_2, \ldots\}$ ja ketjun vierailemien tilojen jonoa $(Y_0, Y_1, \ldots)$. Tällöin

$$Y_n = X_{T_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

kun lisäksi merkitään $T_0 = 0$. Kun hyppyhetkien laskuriprosessia merkitään $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1(T_n \le t)$, voidaan ylläoleva kaava ilmaista kääntäen muodossa

$$X_t = Y_{N(t)}. \tag{11.1}$$

Jatkuva-aikaisen Markov-ominaisuuden perusteella $(Y_0, Y_1, \ldots)$ on diskreettiaikainen Markov-ketju, jonka siirtymämatriisi on P_*. Lisäksi koska hyppyhetkien väliajat ovat toisistaan riippumattomia ja Exp(α)-jakautuneita, on $(N(t))$ Poisson-prosessi intensiteetillä α. Koska ketjun hyppyvauhdit oletettiin vakioiksi, eivät tilat (Y_n) kerro mitään hyppyhetkistä $T_1, T_2, \ldots$. Tämän takia satunnaisprosessit (Y_n) ja $(N(t))$ ovat toisistaan riippumattomat. Hyödyntämällä tätä riippumattomuutta yhdessä esityksen (11.1) kanssa havaitaan, että

$$P_t(x, y) \;=\; \mathbb{P}(X_t = y \,|\, X_0 = x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) = n)\, \mathbb{P}(Y_n = y \,|\, Y_0 = x).$$

Koska satunnaisluku $N(t)$ noudattaa Poisson-jakaumaa odotusarvonaan α, voidaan ylläoleva kaava ilmaista muodossa

$$P_t(x, y) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} P_*^n(x, y). \tag{11.2}$$

Näin on siis saatu laskettua sarjaesitys t:n aikayksikön siirtymämatriisin P_t alkioille. Ylläoleva positiiviterminen sarja suppenee nopeasti, koska nimittäjässä oleva $n!$-termi takaa, että summan termit suppenevat nollaan, kun n kasvaa.

11.1.2 Yleinen rajoitetun hyppyvauhdin ketju

Yleisen jatkuva-aikaisen Markov-ketjun, jonka hyppyvauhdit eivät ole vakioita, analysoiminen on vaikeampaa, sillä hyppyhetkien laskuriprosessi ei ole Poisson-prosessi. Lisäksi hyppyhetket ja ketjun vierailemat tilat voivat tilastollisesti riippua toisistaan. Kun ketjun hyppyvauhteja kuvaava funktio $x \mapsto \lambda(x)$ on rajoitettu, voidaan jatkuva-aikaisen ketjun analyysi kuitenkin palauttaa edellisen kappaleen tapaukseen simuloimalla ketju sopivasti.

Ylikellottamiseksi kutsutun tekniikan mukaan generoidaan taustalle ensin Poisson-prosessi $(N(t))$ intensiteetillä α, missä $\alpha \geq \lambda(x)$ kaikilla x, jonka tapahtumahetkistä generoidaan kaikki Markov-ketjun hyppyhetket. Taustalla oleva Poisson-prosessi tuottaa liikaa hyppyhetkiä, mutta niiden vaikutus voidaan tasoittaa tarjoamalla Markov-ketjulle mahdollisuus pysyä paikallaan tarjotulla tapahtumahetkellä. Määritellään siirtymämatriisi $\hat{P}$ kaavalla

$$\hat{P}(x, y) \ = \ \frac{\lambda(x)}{\alpha} P_*(x, y) + \left(1 - \frac{\lambda(x)}{\alpha}\right) I(x, y), \tag{11.3}$$

missä I on ketjun tilajoukon identiteettimatriisi. Siirtymämatriisin $\hat{P}$ mukaan liikuttaessa suoritetaan joka askeleella kolikonheitto, jonka mukaan todennäköisyydellä $\frac{\lambda(x)}{\alpha}$ edetään siirtymämatriisin P_* mukaisesti ja todennäköisyydellä $1 - \frac{\lambda(x)}{\alpha}$ pysytään paikallaan. Jos $(Y_0, Y_1, \dots)$ on $(N(t))$:stä riippumaton diskreettiaikainen Markov-ketju siirtymämatriisinaan $\hat{P}$, niin voidaan todistaa, että satunnaisprosessi $X_t = Y_{N(t)}$ on jatkuva-aikainen Markov-ketju, jonka hyppyvauhdit ovat $\lambda(x)$ ja hyppytodennäköisyydet $P_*(x, y)$. Toisaalta X_t voidaan myös tulkita vakiohyppyvauhdin α Markov-ketjuksi, jonka hyppytodennäköisyydet ovat $\hat{P}$. Kun vielä todetaan, että kaavan (11.2) johtamiseksi tehty päättely toimii myös tapauksessa, jossa hyppytodennäköisyyksille sallitaan $\hat{P}(x, x) > 0$, saadaan seuraava tulos.

Lause 11.1. *Jatkuva-aikaisen Markov-ketjun, jonka hyppyvauhdit toteuttavat $\lambda(x) \leq \alpha$ kaikilla x, siirtymämatriisit saadaan laskettua kaavasta*

$$P_t \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} \hat{P}^n, \quad t \geq 0, \tag{11.4}$$

missä $\hat{P}$ määritellään kaavalla (11.3).

Lauseen seurauksena alkujakaumasta μ_0 käynnistyvän jatkuva-aikaisen ketjun tilajakauma ajanhetkellä t saadaan vaakavektorin μ_0 ja kaavasta (11.4) (yleensä tietokoneella) lasketun neliömatriisin P_t tulona muodossa $\mu_t = \mu_0 P_t$.

11.2 Generaattorimatriisi

11.2.1 Generaattorimatriisi ja sen matriisieksponentti

Edellisessä kappaleen lauseessa 11.1 kaavan (11.4) vasen puoli ei riipu kellotaajuuden α valinnasta, joten kenties myös kaavan oikean puolen sarjaesitys on mahdollista kirjoittaa parametrista α riippumattomalla tavalla. Tällainen sarjaesitys voidaan johtaa hyödyntämällä matriisieksponenttien teoriaa. Neliömatriisin A *matriisieksponentti* määritellään kaavalla

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

mikäli neliömatriisien $\sum_{n=0}^{r} \frac{A^n}{n!}$ jono suppenee alkioittain, kun $r \to \infty$. Kaavan nimittäjässä oleva nopeasti kasvava $n!$-termi takaa, että e^A on hyvin määritelty kaikille äärellisille neliömatriiseille A. Yleisemmin voidaan todistaa, että e^A on hyvin määritelty myös monille äärettömille neliömatriiseille, erityisesti niille, joiden rivisummat $\sum_y |A(x,y)|$ ovat x:n suhteen rajoitettuja. Matriisieksponenteille tiedetään että $e^{cI} = e^c I$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$ ja lisäksi pätee $AB = BA \implies e^A e^B = e^{A+B}$. Koska $I\hat{P} = \hat{P}I$, voidaan edellämainittujen ominaisuuksien avulla todeta, että

$$P_t = e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha t \hat{P})^n}{n!} = e^{-\alpha t} e^{\alpha t \hat{P}} = e^{-\alpha t} I e^{\alpha t \hat{P}} = e^{-\alpha t I} e^{\alpha t \hat{P}} = e^{\alpha t (\hat{P} - I)}.$$

Lisäksi $\hat{P}$:n määritelmästä (11.3) nähdään, että matriisin $\alpha(\hat{P}-I)$ alkiot voidaan kirjoittaa muodossa

$$Q(x,y) = \lambda(x) P_*(x,y) - \lambda(x) I(x,y), \tag{11.5}$$

joka ei riipu kellotaajuudesta α. Neliömatriisia Q kutsutaan jatkuva-aikaisen ketjun *generaattorimatriisiksi*, jonka diagonaalilta poikkeavat alkiot kuvaavat tilojen välisiä hyppyvauhteja. Generaattorimatriisin negatiiviset diagonaalialkiot on määritelty niin, että Q:n rivisummat ovat nollia.

Generaattorimatriisin avulla voidaan nyt kirjoittaa vaihtoehtoinen esitys kaavalle (11.4) muodossa

$$P_t = e^{tQ}, \tag{11.6}$$

ja jatkuva-aikaisten Markov-ketjujen hetkittäisten tilajakaumien teoria voidaan kiteyttää seuraavasti.

Lause 11.2. *Alkujakaumasta μ_0 käynnistyvän jatkuva-aikaisen Markov-ketjun, jolla on rajoitetut hyppyvauhdit, tilajakauma ajanhetkellä t saadaan vaakavektorin μ_0 ja neliömatriisin P_t tulona*

$$\mu_t = \mu_0 P_t,$$

missä P_t voidaan laskea joko ylikellotetun Markov-ketjun siirtymämatriisista $\hat{P}$ kaavasta (11.4) tai generaattorimatriisin Q avulla kaavasta (11.6).

Vaikka generaattorimatriisin tunteminen on riittävä tieto hetkittäisten tilajakaumien laskemiselle alkujakaumasta, on ylikellottamiseen perustuva kaava (11.4) arvokas lisätieto, sillä sen avulla voidaan monet jatkuva-aikaisiin ketjuihin liittyvät kysymykset palauttaa diskreettiaikaisten ketjujen analyysiin.

Esimerkki 11.3 (Kahden koneen ylläpito)**.** Oletetaan, että esimerkin 10.7 mallissa molemmat koneet ovat toiminnassa alkuhetkellä. Millä todennäköisyydellä molemmat koneet toimivat 3 viikon kuluttua?

Ketjun generaattorimatriisi voidaan kirjoittaa muodossa

$$Q = \begin{bmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 2\mu & -2\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.050 & 0.050 & 0 \\ 0.500 & -0.525 & 0.025 \\ 0 & 1.000 & -1.000 \end{bmatrix}.$$

Kun aikayksikkönä on yksi viikko, saadaan ketjun kolmen viikon siirtymämatriisi laskettua kaavan (11.6) avulla muodossa

$$P_3 = e^{3Q} = \begin{bmatrix} 0.9259028 & 0.07267122 & 0.001425934 \\ 0.7267122 & 0.26404492 & 0.009242859 \\ 0.5703737 & 0.36971437 & 0.059911911 \end{bmatrix}.$$

Koska tilajoukko on indeksoitu alkioilla $S = \{0, 1, 2\}$, saadaan alkutilaa 0 (eli molemmat koneet toiminnassa) vastaavat kolmen viikon siirtymätodennäköisyydet luettua matriisin P_3 ensimmäiseltä riviltä. Vaihtoehtoisesti ajanhetken $t = 3$ tilajakauma voidaan myös laskea tila 0 Dirac-jakaumasta $\delta_0 = [1, 0, 0]$ muodossa

$$\begin{aligned} \delta_0 P_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9259028 & 0.07267122 & 0.001425934 \\ 0.7267122 & 0.26404492 & 0.009242859 \\ 0.5703737 & 0.36971437 & 0.059911911 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.9259028 & 0.07267122 & 0.001425934 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Näin ollen molemmat koneet toimivat 3 viikon kuluttua todennäköisyydellä $P_3(0, 0) = 0.926$. Matriisieksponentin e^{3Q} voi laskea esim. R:llä komennoilla

```
la <- 1/40
mu <- 1/2
Q <- matrix(0,3,3)
Q[1,] <- c(-2*la,2*la,0)
Q[2,] <- c(mu,-(la+mu),la)
Q[3,] <- c(0,2*mu,-2*mu)
library(expm)
P3 <- expm(3*Q)
```

11.2.2 Kolmogorovin differentiaaliyhtälöt

Esitetään vielä tapa ratkaista jatkuva-aikaisen Markov-ketjun siirtymätodennäköisyydet ja hetkittäiset tilajakumat differentiaaliyhtälöiden avulla.

Lause 11.4. *Rajoitetun hyppyvauhdin jatkuva-aikaisen Markov-ketjun siirtymämatriisit toteuttavat alkioittain differentiaaliyhtälöt*

$$\frac{d}{dt}P_t = P_t Q \qquad \textit{ja} \qquad \frac{d}{dt}P_t = QP_t.$$

Ylläolevan kaavan vasen puoli on nimeltään *Kolmogorovin etuperoinen yhtälö* ja oikea puoli *Kolmogorovin takaperoinen yhtälö*. Fysiikassa ja muissa luonnontieteissä nämä yhtälöt tunnetaan myös nimillä Fokkerin–Planckin yhtälö tai "master equation". Näistä yhtälöistä voidaan differentiaaliyhtälöiden numeerisia menetelmiä käyttämällä ratkaista siirtymämatriisit P_t hyödyntämällä alkuehtoa $P_0 = I$.

Todistus. Siirtymämatriisin sarjaesitystä (11.6) termeittäin derivoimalla havaitaan, että

$$\frac{d}{dt}P_t \;=\; \frac{d}{dt}e^{tQ} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\frac{t^n}{n!}Q^n \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nt^{n-1}}{n!}Q^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}Q^{n+1}.$$

Kolmogorovin takaperoinen yhtälö saadaan tästä kirjoittamalla ylläolevan kaavan oikea puoli muodossa

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q\frac{(tQ)^n}{n!} \;=\; Q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tQ)^n}{n!} \;=\; Qe^{tQ} \;=\; QP_t.$$

Kolmogorovin etuperoinen yhtälö todistetaan samaan tapaan.

Voidaan todistaa, että yllä suoritettu termeittäin derivointi ja matriisin Q tuominen äärettömän summan ulkopuolelle ovat sallittuja operaatioita, kun rivisummat $\sum_y |Q(x,y)|$ ovat x:n suhteen rajoitettuja. Tämä ehto on voimassa, sillä

$$\sum_y |Q(x,y)| \;=\; |-\lambda(x)| + \sum_{y:y\neq x} |\lambda(x)P_*(x,y)| \;=\; 2\lambda(x)$$

ja hyppyvauhdit palauttava funktio $x \mapsto \lambda(x)$ oletetettiin rajoitetuksi. □

11.3 Tasapainojakauma

Todennäköisyysjakauma π on jatkuva-aikaisen Markov-ketjun *tasapainojakauma*, jos $\pi P_t = \pi$ kaikilla $t \geq 0$. Tällöin siis alkujakaumasta π käynnistyvän ketjun tilajakauma ei muutu ajan funktiona, eli ketju pysyy tilastollisessa tasapainossa.

Lause 11.5. *Rajoitetun hyppyvauhdin jatkuva-aikaiselle Markov-ketjulle ja mielivaltaiselle todennäköisyysjakaumalle π seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(i) *π on ketjun tasapainojakauma.*

(ii) *$\pi Q = 0$, missä Q on ketjun generaattorimatriisi.*

(iii) $\pi\hat{P} = \pi$, *missä* $\hat{P}$ *on ylikellotetun ketjun siirtymämatriisi.*

Koska Q:n rivisummat ovat nollia, voidaan tasapainoyhtälö $\pi Q = 0$ kirjoittaa alkioittain muodossa

$$\pi(y)\lambda(y) \;=\; \sum_{x:x\neq y} \lambda(x)P_*(x,y),$$

jonka vasen puoli vastaa tasapainotilassa ketjun keskivirtausta ulos tilasta y ja oikea puoli keskivirtausta muista tiloista tilaan y.

Todistus. (i) $\implies$ (ii). Jos π on ketjun tasapainojakauma, niin derivoimalla lauseketta $\pi P_t(y) = \sum_x \pi(x)P_t(x,y)$ termeittäin nähdään Kolmogorovin takaperoista differentiaaliyhtälöä hyödyntämällä (lause 11.4), että

$$\frac{d}{dt}(\pi P_t) \;=\; \pi \frac{d}{dt}P_t \;=\; \pi(QP_t) \;=\; (\pi Q)P_t. \tag{11.7}$$

Kun π on tasapainojakauma, tästä seuraa että $0 = (\pi Q)P_t$. Sijoittamalla tähän $t = 0$ nähdään, että $0 = \pi Q P_0 = \pi Q I = \pi Q$.

(ii) $\implies$ (i). Jos $\pi Q = 0$, nähdään kaavasta (11.7), että tällöin $\frac{d}{dt}(\pi P_t) = 0$, joten $t \mapsto \pi P_t$ on ajan suhteen vakio. Näin ollen $\pi P_t = \pi P_0 = \pi$ kaikilla $t \geq 0$, eli π on ketjun tasapainojakauma.

(ii) $\implies$ (iii). Ylikellotetun Markov-ketjun siirtymämatriisi $\hat{P}$ määritellään kaavalla (11.3), missä $\alpha > 0$ toteuttaa $\alpha \geq \lambda(x)$ kaikilla x. Määritelmästä nähdään suoraan, että

$$\alpha(\hat{P} - I) = Q.$$

Kun $\pi Q = 0$, tästä seuraa, että $\pi(\hat{P} - I) = 0$ eli $\pi\hat{P} = \pi$. Ylläolevaa kaavaa käyttämällä voidaan myös vahvistaa käänteinen seuraamus (iii) $\implies$ (ii). $\square$

Esimerkki 11.6 (Kahden koneen ylläpito)**.** Esimerkin 11.3 ketjulle generaattorimatriisia vastaavat tasapainoyhtälöt $\pi Q = 0$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}
-\pi(0)2\lambda + \pi(1)\mu + \pi(2)\cdot 0 &= 0,\\
\pi(0)2\lambda - \pi(1)(\lambda+\mu) + \pi(2)2\mu &= 0\\
\pi(0)\cdot 0 + \pi(1)\lambda - \pi(2)2\mu &= 0
\end{aligned}$$

Yhdessä normalisointiyhtälön $\pi(0) + \pi(1) + \pi(2) = 1$ näistä voidaan ratkaista tasapainojakaumaksi

$$\pi = \begin{bmatrix} p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \end{bmatrix}$$

missä $p = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$. Kun sijoitetaan $p = 0.952381$, saadaan ratkaisuksi

$$\pi = \begin{bmatrix} 0.907029478 & 0.090702948 & 0.002267574 \end{bmatrix}.$$

11.4 Hetkittäisten tilajakaumien suppeneminen

Jatkuva-aikaisen Markov-ketjun yhtenäisyys määritellään samaan tapaan kuin diskreettiaikaisenkin ketjun. Jatkuva-aikaisen Markov-ketjun *siirtymäkaavio* on suunnattu verkko, jonka solmuina ovat ketjun tilat ja linkkeinä $x \to y$ järjestetyt solmuparit, joille $Q(x,y) = \lambda(x)P_*(x,y) > 0$. Jatkuva-aikainen Markov-ketju ja sitä vastaava generaattorimatriisi on *yhtenäinen*, jos ketjun siirtymäkaavio on vahvasti yhtenäinen suunnattu verkko, eli jokaisen solmuparin välillä on olemassa polku $x \rightsquigarrow y$ ja polku $y \rightsquigarrow x$.

Pienen tilajoukon kyseessä ollessa ketjun yhtenäisyys on helpointa tarkistaa piirtämällä siirtymäkaavio. Suuremmalle tilajoukolle voidaan yhtenäisyys tarkastaa seuraavan aputuloksen avulla. Tuloksen todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi.

Lause 11.7. *Rajoitetun hyppyvauhdin jatkuva-aikainen Markov-ketju on yhtenäinen, jos ja vain jos sitä vastaavan ylikellotetun ketjun siirtymämatriisi $\hat{P}$ on yhtenäinen.*

Seuraava tulos vahvistaa yhtenäisten Markov-ketjujen suppenemisen äärellisessä tilajoukossa. Huomaa, että jatkuva-aikaiselle ketjulle ei tarvitse erikseen olettaa jaksottomuutta. Eksponenttijakautuneet tilojen oleskeluajat nimittäin jatkuvassa ajassa automaattisesti hävittävät kaikki jaksollisuusefektit.

Lause 11.8. *Äärellisen tilajoukon yhtenäisellä jatkuva-aikaisella Markov-ketjulla on olemassa yksikäsitteinen tasapainojakauma ja alkujakaumaan katsomatta Markov-ketjun hetkittäiset tilajakaumat suppenevat kohti tasapainojakaumaa eli kaikilla $x \in S$ pätee*

$$\mu_t(x) \to \pi(x), \quad \text{kun } t \to \infty.$$

11.5 Tilojen esiintyvyydet

Tilan y esiintyvyys jatkuvalla aikavälillä $[0,t]$ saadaan kaavasta

$$N_y(t) \; = \; \int_0^t 1(X_s = y)\, ds.$$

Satunnaisluku $N_y(t)$ kertoo, kuinka monta aikayksikköä prosessi viettää tilassa y aikavälillä $[0,t]$. Tilasta x käynnistyvälle ketjulle tilan y odotettu esiintyvyys saadaan kaavasta

$$M_t(x,y) \; = \; \mathbb{E}_x N_y(t) \; = \; \int_0^t \mathbb{E}_x 1(X_s = y)\, ds \; = \; \int_0^t P_s(x,y)\, ds.$$

Kuten diskreetissäkin ajassa, jatkuva-aikaisen ketjun esiintyvyysmatriisi määritellään M_t:nä.

11.6 Jatkuvan aikavälin kustannusmallit

Systeemin tilaa mallinnetaan jatkuva-aikaisella Markov-ketjulla (X_t). Oletetaan, että mallissa aiheutuu kustannuksia satunnaisella tai deterministisellä vauhdilla $C(x)$ aina systeemin ollessa tilassa x ja oletetaan, että kustannuksen odotettu suuruus $c(x)$ riippuu systeemin menneisyydestä ainoastaan nykytilan kautta. Tarkemmin sanottuna mielivaltaiselle muotoa $H_{t-} = \{X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_n} = x_n\}$, $t_0 < \cdots < t_n < t$, olevalle tapahtumalle pätee

$$\mathbb{E}(C(X_t) \,|\, X_t = x, H_{t-}) \;=\; c(x) \tag{11.8}$$

aina kun $\mathbb{P}(X_t = x, H_{t-}) > 0$. Vaikka jälleen puhutaan kustannuksista, voi $C(x)$ aivan yhtä hyvin viitata voittoon tai mihin tahansa reaaliarvoiseen suureeseen, josta ollaan kiinnostuneita.

Aikavälin $[0, t]$ kustannuskertymä saadaan kaavasta

$$\int_0^t C(X_s)\, ds$$

ja tilasta x käynnistyvän Markov-ketjun *odotettu kustannuskertymä* kaavasta

$$g_t(x) \;=\; \mathbb{E}\left(\int_0^t C(X_s)\, ds \,\middle|\, X_0 = x \right).$$

Seuraava tulos kertoo, miten odotettu kustannuskertymä saadaan laskettua esiintyvyysmatriisista M_t. Allaoleva kaava (11.9) voidaan myös kirjoittaa matriisimuodossa

$$g_t = M_t c,$$

kun funktio $c : S \to \mathbb{R}$ tulkitaan tilajoukon S indeksoimana pystyvektorina.

Lause 11.9. *Odotettu kustannuskertymä voidaan laskea esiintyvyysmatriisin avulla muodossa*

$$g_t(x) \;=\; \sum_y M_t(x, y) c(y). \tag{11.9}$$

Todistus. Yhtälön (11.8) avulla voidaan tarkistaa, että kaikilla ajanhetkillä s pätee

$$\mathbb{E}\left(C(X_s) \,|\, X_0 = x\right) \;=\; \mathbb{E}\left(c(X_s) \,|\, X_0 = x\right) \;=\; \sum_{y \in S} P_s(x, y)\, c(y).$$

Odotusarvon lineaarisuutta, ylläolevaa yhtälöä ja esiintyvyysmatriisin määritelmää käyttämällä havaitaan, että

$$\begin{aligned} g_t(x) &= \int_0^t \mathbb{E}\Big(C(X_s)\,ds \,\Big|\, X_0 = x\Big) \\ &= \int_0^t \sum_{y\in S} P_s(x,y)\,c(y)\,ds \\ &= \sum_{y\in S}\Big(\int_0^t P_s(x,y)\,ds\Big)\,c(y) \\ &= \sum_{y\in S} M_t(x,y)\,c(y). \end{aligned}$$

□

11.7 Ergodisuus

Lause 11.10. *Äärellisen tilajoukon S yhtenäiselle jatkuva-aikaiselle Markov-ketjulle ja mielivaltaiselle funktiolle $f : S \to \mathbb{R}$ pätee*

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)\,ds \;\to\; \sum_{x\in S} f(x)\pi(x)$$

todennäköisyydellä yksi ketjun alkutilaan katsomatta.

Todistus. Tulos voidaan todistaa ylikellotettua Markov-ketjua käyttämällä. Tällöin analyysi voidaan palauttaa diskreettiaikaiseen tulokseen. □

Ergodisuuslauseen 11.10 seurauksena havaitaan, että ketjun tilojen suhteelliset esiintyvyydet toteuttavat

$$\frac{N_t(y)}{t} \to \pi(y)$$

todennäköisyydellä yksi ja esiintyvyysmatriisi toteuttaa

$$t^{-1}M_t(x,y) \to \pi(y)$$

alkutilaan katsomatta.

Lisäksi pitkän aikavälin odotettu kustannusvauhti toteuttaa

$$g(x) \;=\; \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x(C(X_s))\,ds \;=\; \sum_y \pi(y)c(y),$$

eikä kyseinen raja-arvo riipu alkutilasta x.

12 Yleisiä stokastisia malleja

Tässä luvussa tehdään katsaus diskreetin tilajoukon Markov-ketjuja ja diskreetin aikavälin martingaaleja yleisempiin stokastisiin malleihin.

12.1 Jatkuvan aikavälin martingaalit

Jatkuvan aikavälin martingaali määritellään samaan tapaan kuin diskreetin aikavälin martingaali luvussa 6. Satunnaisprosessi $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ on satunnaisprosessin $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ suhteen *martingaali*, jos kaikilla $t, h \geq 0$ pätee

(i) $\mathbb{E}|M_t| < \infty$,

(ii) $M_t \in \sigma(X_s : s \leq t)$, ja

(iii) $\mathbb{E}(M_{t+h} \,|\, X_s : s \leq t) = M_t$.

Ehdot (i) ja (ii) toteuttava satunnaisjono (M_t) on *alimartingaali*, jos

(iii)' $\mathbb{E}(M_{t+h} \,|\, X_s : s \leq t) \geq M_t$.

ja *ylimartingaali*, jos

(iii)" $\mathbb{E}(M_{t+h} \,|\, X_s : s \leq t) \leq M_t$.

Ominaisuus (i) on tekninen ehto, joka takaa että odotusarvot ja ehdolliset odotusarvot on hyvin määritelty. Ominaisuus (ii) puolestaan tarkoittaa, että martingaalin tila ajanhetkellä t voidaan määrittää deterministisenä funktiona informaation $(X_s : s \leq t)$ pohjalta. Varsinainen martingaaliominaisuus (iii) tarkoittaa, että ajanhetkellä t informaation $(X_s : s \leq t)$, ja näin ollen myös arvon M_t, tuntevan havainnoijan odottama arvo martingaalin tulevan ajanhetken arvolle on sama kuin martingaalin nykyarvo. Eron diskreettiin aikaan on nyt, että yhden aika-askeleen sijaan jatkuvassa ajassa tulee vaatia ehto toteen mielivaltaisen pienille (ja suurilla) ajanmuutoksen arvoilla $h \geq 0$.

Diskreettiaikaiselle martingaalille voidaan todistaa, että ehto (iii) on voimassa kaikilla $h \in \mathbb{Z}_+$, vaikka diskreettiaikaisen martingaalin määritelmässä kyseinen ehto vaaditaankin vain tapauksessa $h = 1$.

Esimerkki 12.1 (Kompensoitu Poisson-prosessi)**.** Onko vauhdin $\alpha > 0$ Poisson-prosessi $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ martingaali oman informaationsa suhteen? Satunnaisluku N_t noudattaa Poisson-jakaumaa $\mathrm{Poi}(\alpha t)$, joten $\mathbb{E}|N_t| = \mathbb{E}N_t = \alpha t$ ja ehto (i) on voimassa. Koska selvästikin $N_t \in \sigma(N_s : s \leq t)$, on myös ehto (ii) voimassa. Kirjoittamalla $N_{t+h} = N_t + (N_{t+h} - N_t)$ ja käyttämällä ehdollisen odotusarvon lineaarisuutta sekä tunnetun arvon ulosvetoa havaitaan, että

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N_{t+h} \,|\, N_s : s \leq t) &= \mathbb{E}(N_t \,|\, N_s : s \leq t) + \mathbb{E}(N_{t+h} - N_t \,|\, N_s : s \leq t) \\
&= N_t + \mathbb{E}(N_{t+h} - N_t \,|\, N_s : s \leq t)
\end{aligned}$$

Koska Poisson-prosessilla on riippumattomat muutokset, voidaan riippumattoman informaation huomiotta jättämisellä ja Poisson-prosessin muutosten aikahomogeenisuudella perustella, että

$$\mathbb{E}(N_{t+h} - N_t \,|\, N_s : s \le t) \;=\; \mathbb{E}(N_{t+h} - N_t) \;=\; \mathbb{E}(N_h) \;=\; \alpha h.$$

Näin ollen

$$\mathbb{E}(N_{t+h} \,|\, N_s : s \le t) \;=\; N_t + \alpha h,$$

josta päätellään, että (N_t) ei ole martingaali, sillä ehto (iii) ei ole voimassa. Toisaalta ylläoleva kaava osoittaa, että ehto (12.1) pitää paikkansa. Näin ollen Poisson-prosessi on oman informaationsa suhteen alimartingaali. Sama päättely osoittaa, että nk. *kompensoitu Poisson-prosessi* $\tilde{N}(t) = N(t) - \alpha t$ on oman informaationsa suhteen martingaali.

Esimerkki 12.2 (Brownin liike)**.** Olkoon $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ tilasta $X_0 = 0$ käynnistyvä jatkuva-aikainen satunnaiskulku, joka viettää tilassa x deterministisen ajan τ ja sen jälkeen hyppää tilasta x tilaan $x + \delta$ todennäköisyydellä $1/2$ ja tilaan $x - \delta$ todennäköisyydellä $1/2$, menneisyydestä riippumatta. Monissa luonnonilmiöissä, esim. mallinnettaessa elektronien tai muiden alkeishiukkasten liikettä, yhden aikayksikön kuluessa tapahtuu valtavan suuri määrä pieniä hyppyjä, jolloin mallin parametrit τ ja δ ovat lähellä nollaa. Herää kysymys, lähestyykö satunnaiskulku (X_t) tilastollisilta ominaisuuksiltaan jotain rajaprosessia, kun $\tau \to 0$ ja $\delta \to 0$?

Amerikkalaisen matemaatikon Monroe Donskerin (1924–1991) mukaan nimetyn Donskerin lauseen perusteella kyseinen rajaprosessi on olemassa, kun τ ja δ lähestyvät samanaikaisesti nollaa sellaisessa suhteessa, että $\delta/\sqrt{\tau} \to \sigma$ jollain vakiolla $\sigma > 0$. Kyseinen rajaprosessi on *Brownin liike* varianssiparametrilla σ^2, joka yleensä määritellään tilajoukon $\mathbb{R}$ jatkuva-aikaisena satunnaisprosessina $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, jolla on

(i) alkutila nolla: $B_0 = 0$,

(ii) jatkuvat polut eli kuvaus $t \mapsto B_t$ on jatkuva,

(iii) riippumattomat muutokset:
$(s_1, t_1], \dots, (s_n, t_n]$ erilliset $\implies$ $B_{t_1} - B_{s_1}, \dots, B_{t_n} - B_{s_n}$ riippumattomat,

(iv) aikahomogeeniset muutokset: $B_t - B_s =_{\mathrm{st}} B_{t+h} - B_{s+h}$,

(v) normaalijakautuneet tilat: $B_t =_{\mathrm{st}} \mathrm{Nor}(0, \sigma^2 t)$.

Yllämainitut ominaisuudet toteuttavan satunnaisprosessin olemassaolo seuraa osana Donskerin lauseen todistusta. Brownin liike on nimetty skotlantilaisen kasvitieteilijän Robert Brownin (1773–1858) mukaan, joka tutkiessaan mikroskoopilla siitepölyhiukkasten epäsäännöllistä liikettä veden pinnalla teki yhden ensimmäisistä epäsuorista havainnoista molekyylien olemassaolosta.

Samaan tapaan kuin esimerkissä 12.1 kompensoidulle Poisson-prosessille, voidaan riippumattomien muutosten avulla perustella, että Brownin liike on martingaali oman informaationsa suhteen. Toisaalta voidaan myös todistaa, että Brownin liike on Markov-prosessi. Koska prosessin tilajoukko on ylinumeroituva, ei sen siirtymiä voi kuitenkaan kuvata millään, edes äärettömällä, siirtymämatriisilla. Ylinumeroituvassa tapauksessa Markov-prosessin *siirtymäydin* $P_t(x, A)$ kertoo, millä todennäköisyydellä ketju t:n aikayksikön kuluessa siirtyy tilasta $x \in \mathbb{R}$ tilajoukkoon $A \subset \mathbb{R}$. Brownin liikkeen siirtymäydin voidaan kirjoittaa normaalijakauman $\mathrm{Nor}(x, \sigma^2 t)$ tiheysfunktion avulla muodossa

$$P_t(x, A) \;=\; \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\, e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2 t}}\, dy.$$

Tilajoukon ylinumeroituvuuden takia ei Brownin liikettä myöskään voi kuvata hyppyvauhtien, hyppytodennäköisyyksien tai generaattorimatriisin avulla. Jatkuva-aikaisen ja jatkuvatilaisen Markov-prosessin generaattori voidaan määritellä sopivan funktioavaruuden operaattorina. Varianssin σ^2 Brownin liikettä vastaava generaattori on toisen kertaluvun differentiaalioperaattori $f \mapsto \frac{\sigma^2}{2} f''$. Brownin liikkeen moniulotteista yleistystä vastaava generaattori on Laplace-operaattori, joka kytkee Brownin liikkeen hetkittäisten tilajakaumien analyysin sähkömagnetiikan ja termodynamiikan aaltoyhtälöihin ja auttaa tulkitseman lämmön ja sähkön virtaamista nopeasti ja satunnaisesti hyppelevien alkeishiukkasten kulkuina.

12.2 Semi-Markov-prosessit

Jos numeroituvan tilajoukon satunnaisprosessi on Markov-prosessi, viipyy se jokaisessa käymässään tilassa eksponenttijakaumaa noudattavan satunnaisajan. Eksponenttijakauma on hyvä malli positiiviselle jatkuvalle satunnaisluvulle, josta tiedetään ainoastaan odotusarvo. Monissa käytännön sovelluksissa viipymäajoista tiedetään tarkempia ominaisuuksia ja usein on tarve mallintaa viipymisaikoja sovelluskontekstia tarkemmin mallintavalla jakaumalla. Tähän tarpeeseen kehitetyt semi-Markov-prosessit muodostavat jatkuva-aikaisia Markov-ketjuja yleisemmän stokastisten mallien luokan.

Numeroituvan tilajoukon *semi-Markov-prosessi* (X_t) on jatkuva-aikainen satunnaisprosessi, joka viettää tilassa x satunnaisen ν_x-jakautuneen ajan ja hyppää tilasta x tilaan y todennäköisyydellä $P_*(x, y)$ menneisyydestä riippumatta. Tässä yhteydessä ν_x on jokin todennäköisyysjakauma positiivisilla reaaliluvuilla. Jos $\nu_x = \mathrm{Exp}(\lambda(x))$ kaikilla x, niin prosessi on tavanomainen jatkuva-aikainen Markov-ketju.

Esimerkki 12.3 (Parkkiruutu)**.** Kaduvarren ainoaan parkkiruutuun saapuu tyypin $i = 1, 2$ autoja. Tyypin i autoja saapuu odotusarvoisesti ℓ_i minuutin välein ja nämä viipyvät ruudussa odotusarvoisesti m_i minuuttia, missä $\ell_1 = 3$, $\ell_2 = 10$, $m_1 = 5$, $m_2 = 20$. Saapumisten väliajat ja autojen pysäköintiajat oletetaan toisistaan riippumattomiksi. Parkkiruudun tilaa ajanhetkellä t mallinnetaan jatkuva-aikaisella satunnaisprosessilla (X_t) tilajoukossa $S = \{\emptyset, 1, 2\}$, missä $\emptyset$ tarkoittaa tyhjää parkkiruutua ja tila $i = 1, 2$ kertoo parkkiruutuun pysäköidyn auton tyypin. Jos saapumisten väliajat ja pysäköintiajat ovat eksponenttijakautuneet, niin (X_t) on tilajoukon S jatkuva-aikainen Markov-ketju, jonka hyppyvauhdit saadaan vektorista

$$[\lambda(\emptyset), \lambda(1), \lambda(2)] \; = \; [\lambda_1 + \lambda_2, \mu_1, \mu_2]$$

ja hyppytodennäköisyydet matriisista

$$P_* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} & \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{12.1}$$

missä $\lambda_i = 1/\ell_i$ ja $\mu_i = 1/m_i$.

Tarkasteltaessa rajattua, esimerkiksi tunnin pituista aikaväliä, voi olla perusteltua olettaa, että eri autojen saapumisajat muodostavat riippumattomasti ja tasaisesti sironneen satunnaisen pistekuvion, jolloin saapumisten väliajat todella noudattavat eksponenttijakaumaa. Toisaalta usein voidaan olettaa, että kaikki ruutuun pysäköivät autot pysyvät ruudussa varmuudella yli minuutin. Tällöin tyypin i autojen pysäköintiajan kertymäfunktio toteuttaa $F_i(1) = 0$, jolloin pysäköintiaika ei voi noudattaa eksponenttijakaumaa. Tällöin (X_t) on semi-Markov-prosessi, jonka hyppytodennäköisyydet saadaan matriisista (12.1) ja viipymäaikojen jakaumat ν_x voidaan määrätä niitä vastaavista kertymäfunktioista F_x, $x \in S$.

Todetaan vielä, että parkkiruudun tila on semi-Markov-prosessi vain, jos autojen saapumisten väliajat ovat eksponenttijakautuneita. Hyppytodennäköisyymatriisin (12.1) ensimmäisen rivin johtaminen perustuu muistittomaan kilpajuoksuun, joka vaatii eksponenttijakautuneita saapumisten väliaikoja tilassa $\emptyset$. Tiloissa 1 ja 2 ei pysäköintiaikojen muistittomuutta tarvitse olettaa, sillä niistä tiloista prosessi hyppää aina varmuudella tilaan $\emptyset$, eikä kahden satunnaisajan kilpailutilannetta pääse syntymään.

Semi-Markov-prosessin hetkittäisiä tilajakaumia on yleensä erittäin vaikea laskea analyyttisesti, sillä niiden dynamiikka perustuu monimutkaisiin integraaliyhtälöihin. Sen sijaan semi-Markov-prosessin pitkän aikavälin käyttäytymisen analysointi on lähes yhtä helppoa kuin tavallistenkin jatkuvan aikavälin Markov-ketjujen. Tämä johtuu siitä, että ergodisuuslauseiden perusteella prosessin viipymäaikojen satunnaisvaihtelu voidaan pitkällä aikavälillä keskiarvoistaa ja näin ollen viipyaikojen jakauman erityispiirteet eivät näy prosessin pitkän aikavälin keskiarvoissa. Seuraava lause kiteyttää tämän täsmällisesti.

Lause 12.4 ([Kul11, Thm 5.6])**.** *Jos P_* on yhtenäinen ja tilajoukko äärellinen, niin tilan y esiintyvyys $N_t(y) = \int_0^t 1(X_s = y)\,ds$ toteuttaa*

$$\frac{N_t(y)}{t} \to \frac{\pi_*(y)w(y)}{\sum_x \pi_*(x)w(x)}$$

tn:llä 1 alkutilaan katsomatta, missä π_* on hyppyketjun siirtymämatriisin P_* tasapainojakauma ja $w(x) = \int_{\mathbb{R}_+} t\,\nu_x(dt)$ on odotettu viipymäaika tilassa x.

Esimerkki 12.5 (Parkkiruutu)**.** Esimerkin 12.3 mallissa siirtymämatriisin P_* mukaan etenevän diskreettiaikaisen Markov-ketjun tasapainojakauma voidaan ratkaista muodossa

$$\pi_* \;=\; \left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2},\ \frac{1}{2}\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right] \;=\; [0.500,\ 0.385,\ 0.115]\,.$$

Tilojen viipymäaikojen odotusarvot $w = [w(\emptyset), w(1), w(2)]$ puolestaan ovat

$$w \;=\; \left[\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}, \frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}\right] \;=\; [2.308, 5.000, 20.000]\,.$$

Lauseen 12.4 mukaan tilojen pitkän aikavälin suhteelliset rajaesiintyvyydet

$$\pi_\infty(y) \;=\; \lim_{t\to\infty} \frac{N_t(y)}{t}$$

saadaan todennäköisyyksien π_* odotetuilla viipymäajoilla w painotettuina keskiarvoina. Merkitsemällä $c = (1+\lambda_1/\mu_1+\lambda_2/\mu_2)^{-1}$, voidaan ratkaisu kirjoittaa muodossa

$$\pi_\infty \;=\; c\left[1,\ \frac{\lambda_1}{\mu_1},\ \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right] \;=\; [0.2143, 0.357, 0.429].$$

Näin ollen pitkällä aikavälillä parkkiruutu on vapaana noin 21.4% ajasta. Voidaan lisäksi todeta, että vaakavektori π_∞ on myös tasapainojakauma jatkuva-aikaiselle Markov-ketjulle, joka saadaan olettamalla kaikki pysäköintiajat eksponenttijakautuneiksi. Ergodisuuslauseen 11.10 mukaan näin pitää ollakin, sillä jatkuva-aikainen Markov-ketju on erikoistapaus semi-Markov-prosessista.

12.3 Muistilliset satunnaisprosessit

Sekä diskreetin että jatkuvan aikavälin Markov-ketjuja kuvastaa muistittomuus, joka tarkoittaa, että prosessi muistaa menneisyytensä vain nykytilan välityksellä. Monissa sovelluksissa on kuitenkin tarpeen mallintaa tilannetta, jossa prosessin tulevaisuuden tila voi riippua useammasta menneisyyden tilasta.

Esimerkki 12.6 (Koripallo)**.** Oletetaan, että koripalloilija saa vapaaheitosta korin todennäköisyydellä

- $1/2$, jos kaksi edellistä heittoa menivät ohi
- $2/3$, jos toinen edellisistä heitoista meni ohi
- $3/4$, jos kaksi edellistä heittoa menivät koriin

Merkitään $X_t = 1$, jos heitto t menee koriin, ja $X_t = 0$ nolla muuten. Kun heitot numeroidaan nollasta lähtien, saadaan diskreettiaikainen satunnaisprosessi $(X_0, X_1, \dots)$, joka ei ole Markov-ketju, sillä esimerkiksi

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = 1 \mid X_t = 1, X_{t-1} = 0) \;\neq\; \mathbb{P}(X_{t+1} = 1 \mid X_t = 1, X_{t-1} = 1).$$

Kahden tai useamman tilan välityksellä menneisyydestä riippuva diskreettiaikainen satunnaisprosessi voidaan palauttaa tavallisten Markov-ketjujen analyysiin laajentamalla prosessin tilan käsitettä samaan tapaan kuin determinististen dynaamisten systeemien teoriassa. Kahdesta menneisyyden tilasta riippuva dynaaminen systeemi voidaan mallintaa muodossa

$$x_{t+1} \;= f(x_{t-1}, x_t), \quad t = 1, 2, \dots,$$

missä $f : S \to S$ on jokin deterministinen funktio tilajoukosta itseensä. Määrittelemällä uudeksi tilamuuttujaksi $y_t = (x_{t-1}, x_t)$ huomataan, että

$$y_{t+1} \;=\; g(y_t),$$

missä $g : (x_1, x_2) \to (x_2, f(x_1, x_2))$ on kuvaus tulojoukosta $S \times S$ itseensä. Näin menetellen saadaan kahdesta menneisyyden tilasta riippuva dynaaminen systeemi analysoitua tavallisen yhdestä menneisyyden tilasta riippuvan dynaamisen systeemin avulla.

Yllä esitetty deterministiin dynaamisiin systeemeihin liittyvä päättely saadaan laajennettua satunnaisiin dynaamisiin systeemeihin eli Markov-ketjuihin seuraavalla tavalla. Oletetaan, että satunnaisprosessin $(X_0, X_1, \dots)$ tila X_{t+1} riippuu menneistä tiloistaan vain tilojen (X_{t-1}, X_t) välityksellä, eli

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, H_{t-}) \\ &= \mathbb{P}(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}) \end{aligned} \tag{12.2}$$

kaikilla muotoa $H_{t-} = \{X_{t-2} = x_{t-2}, \dots, X_0 = x_0\}$ olevilla tapahtumilla, joille pätee $\mathbb{P}(X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, H_{t-}) > 0$. Määritellään tilajoukon $S \times S$ satunnaisprosessi $(Y_1, Y_2, \dots)$ kaavalla

$$Y_t = (X_{t-1}, X_t), \quad t = 1, 2, \dots$$

Tällöin ominaisuuden (12.2) avulla havaitaan, että

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Y_{t+1} = (x_t, x_{t+1}) \mid Y_t = (x_{t-1}, x_t), Y_{t-1} = (x_{t-2}, x_{t-1}), \dots, Y_1 = (x_0, x_1)) \\ &= \mathbb{P}(X_t = x_t, X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_0 = x_0) \\ &= \mathbb{P}(X_t = x_t, X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}) \\ &= \mathbb{P}(Y_{t+1} = (x_t, x_{t+1}) \mid Y_t = (x_{t-1}, x_t)), \end{aligned}$$

joten $(Y_1, Y_2, \dots)$ on tulojoukon $S \times S$ Markov-ketju, jonka siirtymämatriisin P alkiot saadaan ehdollisina todennäköisyyksinä

$$P((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \;=\; \mathbb{P}(X_t = y_1, X_{t+1} = y_2 \mid X_{t-1} = x_1, X_t = x_2).$$

Esimerkki 12.7 (Koripallo)**.** Esimerkin 12.6 heittotulokset muodostavat satunnaisprosessin $(X_0, X_1, \dots)$ tilajoukossa $S = \{0, 1\}$, joka ei ole Markov-ketju. Sen sijaan satunnaisprosessi $Y_t = (X_{t-1}, X_t)$, $t \geq 1$, on tulojoukon $S \times S = \{00, 01, 10, 11\}$ Markov-ketju, jonka siirtymämatriisi voidaan taulukoida muodossa

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

Vastaavaa päättely voidaan helposti laajentaa malleihin, joissa on useamman menneisyyden tilan muisti. Kaikkein kehittyneimillä stokastisen analyysin menetelmillä voidaan vastaava päättely laajentaa jopa äärettömän muistin satunnaismalleihin. Tällaisia menetelmiä on kehittänyt mm. Englannissa Warwickin yliopistossa vaikuttava itävaltalaismatemaatikko Martin Hairer [Hai09], joka vuonna 2014 palkittiin Fieldsin mitalilla stokastisiin prosesseihin liittyvästä tutkimustyöstään. Hieman kärjistäen voidaan sanoa, että kaikki stokastiset prosessit voidaan tulkita Markov-prosesseiksi riittävän laajassa tilajoukossa.

A Stokastiikan perustuloksia

A.1 Jatkuvien satunnaislukujen ominaisuuksia

Reaaliarvoinen satunnaismuuttuja eli satunnaisluku X on *jatkuva*, jos sen jakauma voidaan esittää tiheysfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avulla muodossa

$$\mathbb{P}(X \in B) \;=\; \int_B f(x)\, dx.$$

Tällöin $\mathbb{P}(X = x) = 0$ kaikilla x, mikä tarkoittaa, että jatkuvan satunnaisluvun todennäköisyys osua mihinkään ennalta valittuun reaaliakselin pisteeseen äärettömän monen desimaalin tarkkuudella on nolla. Seuraava tulos kertoo, että riippumattomien jatkuvien satunnaislukujen todennäköisyys törmätä toisiinsa on nolla.

Lause A.1. *Jos $X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja jatkuvia satunnaislukuja, ovat niiden realisaatiot todennäköisyydellä yksi erilliset, eli pätee*

$$\mathbb{P}(X_i = X_j \text{ jollain } i \neq j) \;=\; 0.$$

Todistus. Todistetaan tapaus, missä on vain kaksi satunnaislukua X_1 ja X_2. Merkitään X_i:n jakauman tiheysfunktiota $f_{X_i}(x)$. Määritellään funktio $h : \mathbb{R}^2 \to \{0,1\}$ kaavalla

$$h(x_1, x_2) \;=\; 1(x_1 = x_2) \;=\; \begin{cases} 1, & x_1 = x_2, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Tällöin satunnaismuuttuja $Z = h(X_1, X_2)$ on $\{0,1\}$-arvoinen, joten

$$\mathbb{E}(Z) \;=\; 0 \cdot \mathbb{P}(Z = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(Z = 1) \;=\; \mathbb{P}(h(X_1, X_2) = 1) \;=\; \mathbb{P}(X_1 = X_2).$$

Koska X_1 ja X_2 ovat riippumattomia, voidaan satunnaisvektorin (X_1, X_2) yhteisjakauma esittää tiheysfunktion $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$ avulla. Näin ollen satunnaislukujen

$$\mathbb{P}(X_1 = X_2) \;=\; \mathbb{E}(h(X_1, X_2)) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, x_2)\, f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2.$$

Tästä nähdään, että

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = X_2) \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, x_2)\, f_{X_1}(x_1) dx_1 \right) f_{X_2}(x_2) dx_2 \\
&=\; \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{x_2}^{x_2} f_{X_1}(x_1) dx_1 \right) f_{X_2}(x_2) dx_2 \\
&=\; \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot f_{X_2}(x_2) dx_2 \\
&=\; 0.
\end{aligned}$$

Yleisemmän n:n satunnaisluvun tapauksen voi tehdä samaan tapaan.

Numeroituvasti äärettömän satunnaisluvun tapaus seuraa toteamalla, että tapahtuma $A = \{X_i = X_j \text{ jollain } i \neq j\}$ voidaan esittää muodossa $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, missä A_n on tapahtuma, että jotkin satunnaisluvuista $X_1, \ldots, X_n$ realisoituvat samaan arvoon. Tällöin väite seuraa yleisesti voimassa olevalla todennäköisyyksien yhdiste-estimaatilla $\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$. $\square$

Viitteet

[Asm03] Søren Asmussen. *Applied Probability and Queues*. Springer, second edition, 2003.

[BP98] Sergey Brin and Larry Page. The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine. In *7th International World-Wide Web Conference (WWW 1998)*, 1998.

[FS04] Hans Föllmer and Alexander Schied. *Stochastic Finance*. Walter de Gruyter & Co., 2nd edition, 2004.

[Hai09] Martin Hairer. Ergodic properties of a class of non-Markovian processes. In Jochen Blath, Peter Mörters, and Michael Scheutzow, editors, *Trends in Stochastic Analysis*. Cambridge University Press, 2009.

[JP04] Jean Jacod and Philip Protter. *Probability Essentials*. Springer, second edition, 2004.

[Kal02] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Springer, second edition, 2002.

[Kul11] Vidyadhar G. Kulkarni. *Introduction to Modeling and Analysis of Stochastic Systems*. Springer, second edition, 2011.

[LPW08] David A. Levin, Yuval Peres, and Elizabeth L. Wilmer. *Markov Chains and Mixing Times*. American Mathematical Society, http://pages.uoregon.edu/dlevin/MARKOV/, 2008.

[Ros95] Sheldon M. Ross. *Stochastic Processes*. Wiley, second edition, 1995.

[SW08] Rolf Schneider and Wolfgang Weil. *Stochastic and Integral Geometry*. Springer, Berlin, 2008.

[Wil91] David Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, 1991.