Teknillinen korkeakoulu — Londen / Mikkola

Mat-1.150 Reaalianalyysi
Välikoe 2, 12.5.1999 klo 13–16 mallivastauksineen.

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Please write clearly on every sheet on separate lines:
1) course title, "first mid-term examination", date
2) student number+letter, IN BLOCK LETTERS, surname underlined, all given names
3) study programme (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) any former names and study programmes
5) signature.

Tehtävä 1. Olkoot $\lambda_1, \lambda_2, \mu$ σ-algebran $\mathfrak{M}$ mittoja, μ positiivinen sekä λ_1 ja λ_2 kompleksisia.

(a) Osoita: jos $\lambda \ll \mu$, niin $|\lambda| \ll \mu$.[1]
(b) Osoita: jos $\lambda_1 \ll \mu$ ja $\lambda_2 \perp \mu$, niin $\lambda_1 \perp \lambda_2$.
(c) Selvitä, mitä Lebesguen–Radonin–Nikodymin lause sanoo.

Answer: `Pisteet: 6666555543.` **(a)** Olkoon $E \subset \mathfrak{M}$ ja $\mu(E) = 0$. Olkoon $E = \{E_i\}$ mielivaltainen ositus. Tällöin $\mu(E_i) = 0$ $\forall i$ (koska $\mu(E) = \sum_i \mu(E_i)$), joten $\lambda(E_i) = 0$ $\forall i$, siksi $\sum_i |\lambda(E_i)| = 0$, joten näiden supremum $|\lambda|(E) = 0$. Koska E oli mielivaltainen, $|\lambda| \ll \mu$.

Virheitä: "$\lambda(E) = 0 \& E_i \subset E \implies \lambda(E_i) = 0$" (tosin pätee positiivisille).

(b) Olkoon $\lambda_2 \perp \mu$ eli olkoon olemassa $A, B \subset \mathfrak{M}$ s.e., λ_2 on keskittynyt A:lle, μ B:lle ja $A \cap B = \emptyset$. Olkoon $\lambda_1 \ll \mu$. Jos $E \in \mathfrak{M}$, niin $\lambda_1(E) = \lambda_1(E \setminus B) + \lambda_1(E \cap B) = 0 + \lambda_1(E \cap B)$, koska $\mu(E \setminus B) = 0$, joten λ_1 on keskittynyt B:lle, siis $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

Virheitä: "Olkoon A se joukko, jolle λ_2 on keskittynyt" (sellaisia joukkoja on yleensä monta; ainakin X on sellainen). "Olkoon A pienin joukko, jolle λ_2 on keskittynyt" (sellaista ei aina ole, ks. kohta [6.8] kurssin "R&C-katekismuksesta" (esim. $\lambda = m|_{[0,1]}$ on keskittynyt joukolle $A_t := [0,1] \setminus \{t\}$ millä tahansa $t \in \mathbb{R}$)).

(c) [R2: Theorem 6.10].

Pikkuvirheitä: "Olkoon λ positiivinen mitta" po. "kompleksinen" (tosin positiiviset äärelliset mitat ovat kompleksisia mittoja; huom.: jos λ ei ole äärellinen ja $\lambda(E) = \int_E h\,d\mu$ $\forall E \in \mathfrak{M}$, niin $h \notin \Lambda^1(\mu)$), "$h \in L^1(X)$" po. "$h \in L^1(\mu)$" tai "$h \in L^1(X, \mu)$", jotta em. integraali olisi äärellinen.

Tehtävä 2. Osoita, että jos $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$, niin melkein jokainen $x \in \mathbb{R}^k$ on f:n Lebesgue-piste.

Answer: `Pisteet: 6665411110 (= aika hyvin).` [R2: Theorem 7.7]. Määritelmä: 1 p. Joukon $\{Tf = 0\}$ mitallisuus (m:n täydellisyyden avulle): 1 p. Kaikki muu: 1 p.

Virheitä: Määritelmä 7.6 ja lause 7.10 sekotettu keskenään.

Tehtävä 3. Funktio

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}), & \text{kun } 0 < x \le 1; \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

on jatkuva välillä $[0, 1]$. Onko tämä funktio absoluuttisesti jatkuva tällä välillä? Todista vastauksesi oikeaksi.

Answer: `Points: 6644422110.` AC:n määritelmä: 1 p. (tietysti 6 p. saa täydellisellä ratkaisulla (esim. [7.19]:n avulla) ilmankin määritelmää). Pahasti epäonnistunut yritys ratkaista [R2: Theorem 7.18]:n avulla (mutta idea sinänsä järkevä): 1 p.

Ratkaisu 1: Todistetaan, f ei ole BV, kuten tehtävässä 12.2(ii). Niinpä f ei ole AC, koska AC $\subset$ BV [R2: Theorem 7.19]. (Jos jälkimmäinen virke puuttuu täysin, ts. todistettu vain "väärä" asia, niin vain 4 p.)

[1] Originaalissa oli virheellisesti "jos $\lambda_1 \ll \mu$, niin $\|\lambda\| \ll \mu$". Onneksi tämä ei näytä vaikuttaneen vastauksiin.

Ratkaisu 2: Idea: funktio pomppii arvoissa $\pm 1/x$ ja näiden erotusten summa on mielivaltaisen suuri mielivaltaisen pienellä $[0, \delta]$.

Ratkaisu: $a_k := (3\pi/2 + 2\pi k)^{-1}$, $b_k := (\pi/2 + 2\pi k)^{-1}$, jolloin $f(a_k) = -a_k$, $f(b_k) = b_k$, $[a_k, b_k] \subset [0, 1]$ erillisiä.

Valitaan $\epsilon := 1$. Olkoon $\delta > 0$ annettu, todistetaan se kelvottomaksi:

$a_k, b_k \to 0$, kun $k \to \infty$, joten voidaan valita $N \in \mathbb{N}_+$ s.e. $b_N < \delta$, jolloin $\sum_{k=N}^{N+n} |b_k - a_k| \le b_N - 0 < \delta$, kun $n \in \mathbb{N}_+ := \{1, 2, 3, ...\}$.

Kuitenkin $\sum_{k=N}^{N+n} |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=N}^{N+n} |b_k - (-a_k)| \ge \sum_{k=N}^{N+n} b_k = (2\pi)^{-1} \sum_{k=N}^{N+n} (1/4 + k)^{-1} \ge (2\pi)^{-1} \sum_{k=N+1}^{N+n} k^{-1} > 1 = \epsilon$, kun n valitaan sopivasti, koska harmonisena sarjana $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$, niinpä myös $\sum_{k=N+1} \infty 1/k = \infty$, joten $\sum_{k=N+1}^{N+n} \frac{1}{k} \to \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ saadaan mielivaltaisen suureksi, ts. yli epsilonin.

Tehtävä 4. bOlkoon X Banach-avaruus ja olkoon X^* sen duaaliavaruus varustettuna normilla

$$\|f\| := \sup\{|fx| \;\Big|\; \|x\|_X \le 1\}, \quad f \in X^*.$$

(a) Osoita, että X^* on Banach-avaruus.
(b) Osoita, että kuvaus $f \mapsto f(x)$ on (jokaisella kiinteällä $x \in X$) rajoitettu lineaarinen funktionaali (määrittelyjoukkonaan X^*).
(c) Osoita, että em. kuvauksen $f \mapsto f(x)$ normi on $\|x\|$ (kun $x \in X$).

Answer: `Points: 5444443222.` Huom.: (a)-kohta (= harjoitustehtävä 8.3) osoittaa, että tehtävien lukeminen ei riitä, ne pitää myös itse laskea (luntaten tarvittaessa), jotta todella hahmottaisi, mitä tehtiin. Tosin varmaan vaikean kokeen aikapula oli osasyyllinen.

(a) `(3 p.)` "X^* on normiavaruus": en vaatinut tämän todistusta, koska tehtävän sanamuoto antoi ymmärtää tuon oletetuksi. Jonkin pikkuvirheen sen todistamisella saattoi kuitata.

Niinpä riitti todistaa, että X^* on täydellinen, eli: Olkoon $\{f_n\} \subset X^*$ Cauchy-jono. 1. Tällöin mielivaltaisella $x \in X$ myös $\{f_n x\} \subset \mathbb{C}$ on Cauchy-jono, koska - -, joten $\exists \lim_n f_n x =: f(x)$ (koska $\mathbb{C}$ on täydellinen). `(1 p.)` 2. f on lineaarinen, koska - -. 3. $|fx| \le$- -$\le C\|x\| \ \forall x$, joten $f \in X^*$. `(1 p.)` 4. $|fx - f_n x| \le$- -$\le \epsilon\|x\| \ \forall x \in X$, joten $\|f - f_n\|_{X^*} \to 0$ eli $f_n \to f$ avaruudessa X^*, QED. (Yksityiskohdat: ks. harjoitustehtävä 8.3.) `(1 p.)`

(b) `(1 p.)` $T_x : f \mapsto fx$ on lineaarinen $X^* \to \mathbb{C}$, koska $T_x(\alpha f + g) := (\alpha f)x + gx = \alpha fx + gx = \alpha T_x f + T_x g \ \forall f, g \in X^* \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$. T_x on rajoitettu, koska $|T_x f| = |fx| \le \|f\|\|x\| \ \forall f \in X^*$, siis $\|T_x\|_{X^{**}} \le \|x\|_X$ (mielivaltaisella $x \in X$).

(c) `(2 p.)` Olkoon $a \in X \setminus \{0\}$ mielivaltainen. Aliavaruudessa $M := \{\lambda a \,|\, \lambda \in \mathbb{C}\}$ määritellään $f(\lambda a) := \lambda$. Selvästi $f \in M^*$ ja $\|f\| = 1/\|a\|$, joten Hahnin–Banachin lauseen mukaan on olemassa $g \in X^*$ s.e. $\|g\| = 1/\|a\|$ ja $g_{|_M} = f$, erityisesti $ga = fa = 1$. Niinpä $\|T_a\| \ge |T_a g|/(1/\|a\|) = |g(a)|/(1/\|a\|) = \|a\|$. Kohdan (b) mukaan myös $\|T_a\| \le \|a\|$, joten $\|T_a\| = \|a\|$.

(Huom.: yllä oletettu $X \ne \{0\}$; muutoinhan $X^* = \{0\}$ ja väitteet ovat triviaalisti tosia.)

Virheitä: 1. "$f_n x \to fx \ \forall x \in X \implies f_n \to f$." Esim. $X := \ell^2(\mathbb{N})$, $f_n x := x_n \implies$[2] $f_n x \to 0 \forall x$, vaikka $\|f_n - 0\| = 1 \not\to 0$, ts. $f_n \not\to 0$ avaruudessa X^* (by the way, [6.16]:n mukaan $X^* \cong \ell^2(\mathbb{N})$).

2. Oletettiin "$\|f - f_n\| = \lim_{m\to\infty} \|f_m - f_n\|$", vaikka se pitäisi todistaa.

---

[2]Koska $x \in \ell^2 =: X \implies x_n \to 0$, koska muutoin $\forall N \exists n \ge N$ s.e. $|x_n| \ge \epsilon$, ja tällöin $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \infty$.