Mat-1.150 Reaalianalyysi: 9. harj. vastauksineen ma 22.3.1999 (3 sivua) Merkinnöistä: $\int_{\mathbb{R}} ax^2\,dx := \int_{\mathbb{R}} ax^2\,dm =: \int_{\mathbb{R}} ax^2\,dm(x)$ (ts. funktion $x \mapsto ax^2$ integraali Lebesguen mitan (m) suhteen), vast. $\int_X ax^2\,d\mu(x) := \int_X ax^2\,d\mu$ (saman funktion integraali mitan μ suhteen), mutta mitan perässä oleva (x)-merkintä kertoo integrointimuuttujan (joka esim. viimeisessä yo. merkinnöistä jäisi lukijan arvauksen varaan).

Kuudennen(kin) luvun teoriaa sovelletaan mm. todennäköisyyslaskennassa: siinä X on mahdollisten tapahtumien joukko, $\mathfrak{M} \subset 2^X$ ja positiivinen mitta μ kertoo kunkin $E \subset \mathfrak{M}$ todennäköisyyden ($\mu(X) = 1$ ja μ on positiivinen (siis myös kompleksinen, koska $|\mu|(X) = 1 < \infty$)). Esim. $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mu(n) = 1/6\ \forall n \in X$, $\mathfrak{M} = 2^X$ ja $\mu(E) := |E|/6$, jolloin $\mu(\{2,4,6\}) = 1/2$ kertoo, että todennäköisyydellä 1/2 nopasta tulee parillinen tulos. Satunnaismuuttuja $f(n) = n - 3\frac{1}{2}$ voisi olla pelaajan voitto markkoina (satunnaismuuttujat ovat mitallisia funktioita) ja $E[f] := \int_X f\,d\mu = 0$ sen odotusarvo, $\int_X |f - E[f]|^2\,d\mu$ varianssi jne. Tästä tarkemmin matemaattisen todennäköisyyslaskun kurssilla.

Tehtävä 9.1 ([6.7] *helpohko, lyhyt*):
Olkoot μ, ν ja λ kompleksisia mittoja σ-algebrassa $\mathfrak{M}$, $\mu \perp \lambda$ ja $\nu \perp \lambda$. Todista, että[1] (a) $(\alpha\mu) \perp \lambda\ \forall \alpha \in \mathbb{C}$ ja (b) $\mu + \nu \perp \lambda$.

Vastaus: Oletusten perusteella on olemassa joukot $A, A', B, B' \in \mathfrak{M}$ s.e. μ on keskittynyt A:lle (ts. $\mu(E) = \mu(E \cap A)\ \forall E \in \mathfrak{M}$), λ B:lle ja $A \cap B = \emptyset$, sekä ν on keskittynyt A':lle, λ B':lle ja $A' \cap B' = \emptyset$.

(a) $(\alpha\mu)(E) := \alpha \cdot \mu(E) = \alpha \cdot \mu(E \cap A) =: (\alpha\mu)(E \cap A)\ \forall E \in \mathfrak{M}$, joten myös $\alpha\mu$ on keskittynyt A:lle. Koska $A \cap B = \emptyset$, on $\alpha\mu \perp \lambda$, QED.

(b) Koska $\lambda(E) = \lambda(E \cap B')\ \forall E \in \mathfrak{M}$ ja $\lambda(E) = \lambda(E \cap B)\ \forall E \in \mathfrak{M}$, niin $\lambda(E) = \lambda(E \cap B') = \lambda((E \cap B') \cap B) = \lambda(E \cap (B' \cap B))\ \forall E \in \mathfrak{M}$, siis λ on keskittynyt joukolle $B \cap B' =: B''$. Toisaalta $(\mu + \nu)$ on keskittynyt joukkoon $A'' := A \cup A'$:

$$(\mu + \nu)(E) := \mu(E) + \nu(E) = \mu(E \cap A) + \nu(E \cap A')$$
$$\stackrel{*}{=} \mu(E \cap (A \cup A')) + \nu(E \cap (A \cup A')) = (\mu + \nu)(E \cap (A \cup A')),$$

[1]**Vihjeet:** (a) Määritelmästä (samat A ja B kelpaavat). (b) Määritelmästä (ota joukot A ja B pareille μ ja λ; joukot A' ja B' pareille ν ja λ; $A'' := A \cup A' \wedge B'' := B \cap B'$).

[(*): koska $\mu(E \cap (A' \setminus A)) = \mu((E \cap (A' \setminus A)) \cap A) = 0$, joten $\mu(E \cap (A \cup A')) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap (A' \setminus A)) = \mu(E \cap A)$ ja ν vast.] Siis $(\mu + \nu) \perp \lambda$, koska $A'' \cap B'' = (A \cap B'') \cup (A' \cap B'') \subset (A \cap B) \cup (A' \cap B') = \emptyset$, QED.

Tehtävä 9.2 ([6.5] *helppo, nopea*):
Olkoon $(X, \mathfrak{M})$ mitallinen avaruus. Olkoon $V := \{\mu \mid \mu$ on $\mathfrak{M}$:n kompleksinen mitta$\}$. Määritellään $\|\mu\| := |\mu|(X)\ \forall \mu \in V$. Osoita, että tämä todella on normi (siis V on normiavaruus).

Vastaus: (Huom.: en heti keksi vastaesimerkkiä, mutta eipä taida V välttämättä täydellinen (Banach) olla; vrt. [R2:Exe6.3].)

1° V on vektoriavaruus: selvästi $c\mu + \nu \in V$, jos $\mu, \nu \in V$ ja $c \in \mathbb{C}$ (ks. [6.5]).

2° Normin kolme aksioomaa:

(c) Jos $\|\mu\| = 0$, niin on $\mu(E) = 0\ \forall E \in \mathfrak{M}$ eli $\mu = 0$, koska muutoin olisi $|\mu|(X) \geq |\mu|(E) \geq |\mu(E)| > 0$.

(b) $\|c\mu\| := |c\mu|(X) = \sup_{\{E_i\}} \sum_{i=1}^\infty |c\mu(E_i)| = \sup_{\{E_i\}} \sum_{i=1}^\infty |c||\mu(E_i)| = |c| \sup_{\{E_i\}} \sum_{i=1}^\infty |\mu(E_i)| = |c|\|\mu\|$.

(a) $\|\mu + \nu\| := |(\mu + \nu)|(X) := \sup_{\{E_i\}} \sum_{i=1}^\infty |(\mu + \nu)(E_i)| \leq \sup_{\{E_i\}} \sum_{i=1}^\infty [|\mu(E_i)| + |\nu(E_i)|] = \sup_{\{E_i\}} |[\sum_{i=1}^\infty |\mu(E_i)| + \sum_{i=1}^\infty |\nu(E_i)|] \leq \sup_{\{E_i\}} \sum_{i=1}^\infty |\mu(E_i)| + \sup_{\{E_i\}} \sum_{i=1}^\infty |\nu(E_i)| = |\mu|(X) + |\nu|(X) = \|\mu\| + \|\nu\|$.

Tehtävä 9.3 ([6.19] *helpohko, nopeahko*):
[R2:Exe6.3] Olkoon X lokaalisti kompakti Hausdorffin avaruus. $M := M(X) := \{\mu \mid \mu$ on kompleksi säännöllinen X:n Borel-mitta$\}$. Määritellään $\|\mu\| := |\mu|(X)\ \forall \mu \in M$. Osoita, että $M(X)$ on Banach-avaruus.

Vastaus: Olkoon $\mathfrak{M}$ X:n Borel-σ-algebra eli pienin $\mathcal{T}_X$:n sisältävä σ-algebra [1.11]. Säännöllisyys [s. 130 & 2.15]: $\forall E \in \mathfrak{M}$ pätee (1) $|\mu|(E) = \inf\{|\mu|(V) \mid V \supset E$ on avoin$\}$ ja (2) $|\mu|(E) = \sup\{|\mu|(K) \mid K \subset E$ on kompakti$\}$ (jälkimmäisen tarvitsee päteä vain niillä $E \in \mathfrak{M}$, joilla $|\mu|(E) < \infty$ (kun $|\mu|$ on positiivinen), mutta kompleksiset mitathan ovat aina äärellisiä).

(a) M on normiavaruus: Osoitetaan M normiavaruuden V aliavaruudeksi. Tehtävän 9.2 perusteella ainoa epäselvä asia on se, ovatko $c\mu$ ja $\mu + \nu$ aina säännöllisiä, kun μ ja ν ovat. $|c\mu|(E) = |c||\mu|(E)$ selvästi toteuttaa ehdot (1) ja (2) (ei-negatiivisen vakion saa ottaa ulos inf:stä ja sup:sta). Tutkitaan siis summamittaa $\mu + \nu$:

Ehto (1): Olkoon $\epsilon > 0$ ja $E \in \mathfrak{M}$. Valitaan avoimet $V, V' \supset E$ s.e. $|\mu|(V) < |\mu|(E) + \epsilon/2$, $|\nu|(V') < |\nu|(E) + \epsilon/2$; $W := V \cap V'$. Tällöin $|\mu+\nu|(W) - |\mu+\nu|(E) = |\mu+\nu|(W \setminus E) \leq |\mu|(W \setminus E) + |\nu||(W \setminus E) \leq |\mu|(V \setminus E) + |\nu|(V' \setminus E) < \epsilon$. Ehto (2): vastaavasti.

(b) M on täydellinen:

Lauseen [6.19] perusteella, kun X on mikä tahansa lokaalisti kompakti Hausdorffin avaruus (esim. $\mathbb{R}^k$:n avoin tai suljettu osajoukko), niin $M(X) = \mathcal{C}_0(X)^* := \mathcal{L}(\mathcal{C}_0(X), \mathbb{C})$, joten $M(X)$ on täydellinen (Banach-avaruus), koska normiavaruuksien duaalit ovat täydellisiä [tehtävä 8.3].[2]

Alkuperäisessä tehtävässä sanottiin vain, että X on kompakti, joten yritetään todistaa suoraan:

Olkoon $\{\mu_n\} \subset M(X)$ Cauchy-jono.

1° Arvataan raja-arvo μ: Tällöin myös $\{\mu_n(E)\} \subset \mathbb{C}$ on[3] Cauchy-jono, olkoon $\mu(E) := \lim_n \mu_n(E)$; näin siis $\forall E \in \mathfrak{M}$. (Huom.: jos μ on raja-arvo, niin välttämättä $\mu(E) := \lim_n \mu_n(E)$, joten tämä $\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ on ainoa mahdollinen raja-arvo.

2° μ on kompleksinen Borel-mitta: Se on funktio $\mathfrak{M} \to \mathbb{C}$, missä $\mathfrak{M}$ on Borel-σ-algebra, joten pitäisi vain todistaa se mitaksi [6.1]. Olkoon $\{E_i\}$ E:n ositus [6.1]. $\mu(E) = \lim_n \mu_n(E) = \lim_n \sum_i \mu_n(E_i) = \lim_n \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^N \mu_n(E_i)$. Nyt siis pitäisi saada limekset kommutoimaan, mikä vaatisi esim. dominoidun konvergenssin lausetta, mutta onko perheellä $\{\mu_n\}$ yhteistä $\ell^1(\mathbb{N})$-majoranttia? Ei kannata uhrata tälle enempää aikaa, kun todistus näyttää melkoisen hankalalta (enkä tiedä päteekö väite ei-Hausdorffeissa) (3°: säännöllinen, 4° $\mu_n \to \mu$ M:ssä (joukoittainen [1°] ei riitä).)

Kommentti: Huom.: 1°:ssä todettiin, että missä tahansa $(X, \mathfrak{M})$ säännölliset mitat ovat normiavaruus. Nyt todistimme, että Borel-$\mathfrak{M}$:n ja kompaktin X:n tapauksessa ko. normiavaruus on täydellinen (Banach-avaruus).

[2] Tarkkaan ottaen: On olemassa isometrinen isomorfismi $T : M(X) \to \mathcal{C}_0(X)^*$ ($T : \mu \mapsto T_\mu$, missä $T_\mu\phi := \int_X \phi\, d\mu$). Jos $\{\mu_n\}$ on Cauchy-jono, niin on myös $\{T_{\mu_n}\}$, joten $T_{\mu_n} \to \Lambda \in \mathcal{C}_0(X)^*$ (koska duaali on aina täydellinen [harj. 8.3]), joten $\Lambda = T_\mu$ jollain $\mu \in M$, joten $\|\mu - \mu_n\| = \|\Lambda - T_{\mu_n}\| \to 0$, QED.

[3] Tapa 1: $T_E : \mu \mapsto \mu(E)$ on jatkuva lineaarinen funktionaali, ts. $T \in \mathfrak{M}^* := \mathcal{L}(M, \mathbb{C})$. Tapa 2: $|\mu_n(E) - \mu_m(E)| = |(\mu_n - \mu_m)(E)| \leq |\mu_n - \mu_m|(E) \leq |\mu_n - \mu_m|(X) =: \|\mu_n - \mu_m\| < \epsilon\ \forall n, m \geq N_\epsilon$.

Tehtävä 9.4 ([6.8] *varsin helppo ja nopea*):
Valitse $(X, \mathfrak{M})$ (esim. $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$) ja määrittele sen kompleksimitat μ ja ν s.e. mikään relaatioista $\mu \ll \nu$, $\nu \ll \mu$ ja $\mu \perp \nu$ ei ole voimassa.

Vastaus: Tapa 1: $\mu(\{0\}) = 1 = \mu(\{1\})$; $0, 1 \notin E \Rightarrow \mu(E) = 0$. $\nu(\{0\}) = 1 = \nu(\{-1\})$; $0, -1 \notin E \Rightarrow \nu(E) = 0$. Jos μ on keskittynyt A:lle ja ν B:lle, niin $0 \in A \cap B$, joten $A \cap B \neq \emptyset$, siis $\neg(\mu \perp \nu)$. Selvästi $\mu \not\ll \nu \wedge \nu \not\ll \mu$.

Tapa 2: $\mu(E) := \int_0^2 \chi_E\, dm$ ja $\nu(E) := \int_1^3 \chi_E\, dm$. Ei ole $\mu \perp \nu$, koska jos μ on keskittynyt $A \in \mathcal{B}$:lle ja ν $B \in \mathcal{B}$:lle, niin $m([1,2] \setminus (A \cap B)) = 0$ (koska $([1,2] \setminus A) \cap A = \emptyset$, joten $0 = \mu([1,2] \setminus A) = m([1,2] \setminus A)$; B vast.). Niinpä $A \cap B \neq \emptyset$.
Selvästi $\mu \not\ll \nu$ (esim. $\nu(\{1\} = 0 \not\Longrightarrow \mu(\{1\} = 0)$ ja $\nu \not\ll \mu$.

Kommentti: Jälkimmäisessä esimerkissä μ ja ν ovat positiivisia ja kompleksisia mittoja lauseen [1.29] perusteella (ja sen, että $|\mu|(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R}) = 2 = |\nu|(\mathbb{R})$).

Tehtävä 9.5 ([Luku 5] *vaikeahko, keskipitkä*):
Olkoon $I := [0, R] \subset \mathbb{R}$, $X := \mathcal{C}(I)$ (tietysti sup-normilla). Olkoon $A : \mathcal{D}(A) \to X$ määritelty siten, että

$$\mathcal{D}(A) := \{f \in X \mid f' \in X\}, \quad Af := f'.$$

Onko A *suljettu*, ts. $f_n \to f \wedge Af_n \to g \Longrightarrow \exists Af = g$?

Vastaus: Huom.: päätepisteissä tarkoitetaan toispuolisia derivaattoja. Huom.: $\mathcal{C}(I) = \mathcal{C}_{bu}(I) = \mathcal{C}_0(I) = \mathcal{C}_c(I)$, ts. kompaktilla I jatkuvat ovat tasaisesti jatkuvia ja rajoitettuja [R1]. *Esimerkki:* ei-suljettu kuvaus (operaattori): jos $X := L^2(I)$, $\mathcal{D}(B) := \mathcal{C}(I)$, $Bf := f(0)$ (vakiofunktio), niin

$F_n \to 1$ ja $BF_n \equiv F_n(0) = 0 \to 0$ mutta $B1 = 1 \neq 0$, joten B ei ole suljettu; tässä F_n on sama kuin tehtävässä 8.1. Huom.: jokainen jatkuva kuvaus on suljettu.

Ratkaisu: Selvästi $\mathcal{D}(A)$ on X:n aliavaruus ja A on lineaarinen kuvaus.[4]

Olkoon $f_n \to f$ ja $Af_n \to g$ avaruudessa $\mathcal{C}(I)$. Meidän on siis osoitettava, että välttämättä $\exists Af = g$ (ts. $f \in \mathcal{D}(A) \wedge Af = g$ eli $\exists f' = g$).

Olkoon $x \in I$ ja $\epsilon' > 0$. Olkoon $\epsilon := \epsilon'/4$. Valitaan $\delta > 0$ s.e. $|g(x) - g(y)| < \epsilon \Longleftarrow |x-y| < \delta \wedge x, y \in I$. Olkoon nyt $|h| \in]0, \delta[\wedge x + h \in I$; meidän riittää siis osoittaa, että $|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)| < \epsilon'$ (OK myös kun $x = 0 \vee x = R$).

Valitaan N_ϵ s.e. $\|Af_n - g\| < \epsilon \wedge \|f_n - f\| < \epsilon|h| \ \forall n \geq N_\epsilon$. Merkitään $n := N_\epsilon$. On olemassa[5] $\xi = \xi_{f_n,x,h} \in]x, x+h[$ s.e. $|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - g(x)| \leq |f_n'(\xi) - g(x)|$, joten

$$
\begin{aligned}
&|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)| \\
\leq\ & |\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - g(x)| + |\frac{f(x+h)-f_n(x+h)}{h}| + |\frac{-f(x)+f_n(x)}{h}| \\
<\ & |f_n(\xi_{n,h}) - g(x)| + \epsilon + \epsilon \leq |f_n(\xi_{n,h}) - g(\xi_{n,h})| + |g(\xi_{n,h}) - g(x)| + \epsilon + \epsilon \\
<\ & \epsilon + \epsilon + \epsilon + \epsilon = \epsilon'.
\end{aligned}
$$

Koska x ja ϵ' olivat mielivaltaisia, $\exists f' = g$, QED.

Kommentteja: (Ei kuulu kurssiin.) Jos $\{f_n\}$ on Cauchy-jono $\mathcal{C}^1(I)$:ssä (normina $\|f\|_{\mathcal{C}^1} := \|f\|_{\mathcal{C}} + \|f'\|_{\mathcal{C}} := \sup|f| + \sup|f'|$), niin se on Cauchy-jono $\mathcal{C}$:ssä samoin kuin f', joten $f_n \to f$ ja $f_n \to g$ (koska $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$ on täydellinen [R2: 3.17]). Yllä todistetun perusteella $g = f'$, joten $\|f_n - f\|_{\mathcal{C}^1} = \|f_n - f\|_{\mathcal{C}} + \|f_n' - f'\|_{\mathcal{C}} \to 0$ eli $f_n \to f$ avaruudessa $\mathcal{C}^1$. Siis $\mathcal{C}^1(I)$ on täydellinen! Induktiolla myös $\mathcal{C}^k(I)$ **on täydellinen**. Itse asiassa sama todistus kelpaa kun $X := \mathcal{C}_b^k(I, Y)$, missä Y on Banach-avaruus (ja $I \subset \mathbb{R}^k$ avoin tms., jolloin derivaatta tarkoittaa gradienttia; tosin tämä vaatii hieman muokatun todistuksen; myös $\mathcal{C}_b^k(I,Y)$:n aliavaruudet $\mathcal{C}_{bu}^k(I,Y)$ ja $\mathcal{C}_0^k(I,Y)$ ovat suljettuja (eli täydellisiä eli Banach-avaruuksia)).

[4] Huom.: A ei ole jatkuva. Olkoon $g_n(t) = (1-nt)\chi_{[0,1/n]} \in X$, $f_n(t) := \int_{1/n}^t g_n(r)\,dr \in \mathcal{C}^1(I)$. Tällöin $\|f_n\| = f_n(0) = 1/2n \to 0$, vaikka $\|Af_n\| = \|g_n\| = 1 \not\to 0$, joten $\|A\| = \infty$.

[5] Tämä saadaan väliarvolauseesta; jos funktion arvot olisivatkin $\mathbb{C}^k$:ssa (tai muussa $\geq$ 2-ulotteisessa Banach-avaruudessa), niin väliarvolause ei pätisi mutta tässä esitetty "väliarvoepäyhtälö" pätee [TID].